А.Заславский, А.Акопян,
О.Заславский, П.Кожевников

ТОЧКИ БРОКАРА
Решения

1 Точки Брокара в треугольнике

1. Так как $\angle PAB = \angle PBC$, $\angle BPA = \pi - \angle B$, т.е. P лежит на окружности, проходящей через A и B и касающейся BC. Так как $\angle PBC = \angle PCA$, P лежит на окружности, проходящей через B и C и касающейся CA. Следовательно, P — точка пересечения этих окружностей, отличная от B. Точка Q строится аналогично.

2. Ответ $\mathrm{ctg}\phi = \mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C$ следует из формулы, доказываемой ниже.

3. Пусть A', B', C' — точки, симметричные P относительно BC, CA, AB. Так как $CA' = CP = CB'$ и $\angle PCA = \angle QCB$, CQ — серединный перпендикуляр к отрезку $A'B'$, т.е. Q — центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$. Значит, середина PQ — центр описанной окружности треугольника, образованного проекциями P на стороны ABC. Аналогично, середина PQ — центр описанной окружности треугольника, образованного проекциями Q. Очевидно, что радиусы этих окружностей равны.

4. Пусть прямые AP, BP, CP вторично пересекают описанную около ABC окружность в точках A', B', C'. Тогда дуги BA', CB' и AC' равны, т.е. треугольник $B'C'A'$ получается из треугольника ABC поворотом вокруг O на угол 2ϕ. Точка P для треугольника $A'B'C'$ является второй точкой Брокара, откуда следуют оба пункта задачи.

5. Пусть C' — точка пересечения прямых AP и BQ. Так как угол между этими прямыми равен 2ϕ, то по предыдущей задаче получаем, что C' лежит на окружности OPQ. Кроме того, очевидно, что $OC' \perp AB$. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $C'L \parallel AB$. Определим точки A', B' аналогично точке C'. Так как треугольники ABC', BCA' и CAB' подобны, расстояния от A', B', C' до соответствующих сторон треугольника ABC пропорциональны этим сторонам. Так же относятся и расстояния до сторон треугольника от диаметрально противоположной O точки окружности OPQ. Но этим условиям удовлетворяет только точка Лемуана.

6. a) , b) **Указание.** Рассмотрите поворотные гомотетии с центрами P (Q), переводящие Q (P) в O.

c) **Ответ.** Середина отрезка OL, $\pi - 2\phi$.

7. Так как $\angle PAC' = \angle QBC' = \phi$ и $\angle PC'A = \angle QC'B$, треугольники APC' и BQC' подобны, т.е. $AC'/BC' = AP/BQ$. Но из треугольников ACP, BCQ $AP/\sin\phi = AC\sin A$, $BQ/\sin\phi = BC/\sin B$. Следовательно, $AC'/BC' = AC^2/BC^2$ и CC' — симедиана.

8. Это частный случай задачи 27.

2 Точки Брокара в четырехугольнике

9. Доказательство такое же, как в задаче 1.

10. Так как $\angle APB = \pi - \angle B$, $\angle BPC = \pi - \angle C$, то применяя теорему синусов к треугольникам APB и BPC, получаем

$$\frac{PB}{\sin\phi} = \frac{AB}{\sin B}, \quad \frac{PB}{\sin(C-\phi)} = \frac{BC}{\sin C}.$$

Разделив первое уравнение на второе, после преобразований получаем

$$\mathrm{ctg}\phi = \frac{AB}{BC\sin B} + \mathrm{ctg}C.$$

11. Запишем условие $\phi(ABCD) = \phi(DCBA)$ в виде

$$\frac{AB}{BC\sin B} - \mathrm{ctg}B = \frac{CD}{BC\sin C} - \mathrm{ctg}C.$$

Приведя обе части этого равенства к общему знаменателю, возведя их в квадрат и прибавив по единице, получим

$$\frac{AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos B}{\sin^2 B} = \frac{CD^2 + BC^2 - 2CD\cdot BC\cos C}{\sin^2 C},$$

т.е. $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BD}{\sin C}$, ч.т.д.

12. Из построения точек P_i следует, что четырехугольники BCP_1P_2, CDP_2P_3, DAP_3P_4, ABP_4P_1 — вписанные. Отсюда легко вывести, что $\angle P_1P_4P_3 + \angle P_3P_2P_1 = \angle A + \angle C = \pi$.

13. Из вписанного четырехугольника BCP_1P_2 получаем

$$\frac{P_1P_2}{BC} = \frac{\sin(\phi(ABCD) - \phi(BCDA)}{\sin(C + \phi(ABCD) - \phi(BCDA)} = \frac{Q_1Q_2}{CD}.$$

14. См. http://jcgeometry.org/Articles/Volume2/Belev_Brocard_points.pdf

15. См. http://jcgeometry.org/Articles/Volume2/Belev_Brocard_points.pdf

16. См. http://jcgeometry.org/Articles/Volume2/Belev_Brocard_points.pdf

17. Так как $\phi(ABCD) = \phi(DCBA)$, требуемое равенство можно записать в виде

$$\frac{AB}{BC\sin B} + \mathrm{ctg}C = \frac{AD}{DC\sin D} + \mathrm{ctg}C.$$

Поскольку $\sin B = \sin D$, это равносильно искомому.

18. Так как $ABCD$ вписанный, $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD$, т.е. $AB\cdot CD = AC\cdot BD/2$. Пусть M — середина AC. Тогда $CM\cdot BD = BC\cdot AD$, т.е. $BC/CM = BD/AD$. Поскольку $\angle BCM = \angle BDA$, треугольники BCM и BDA подобны. Следовательно, $\angle MBC = \angle ABD$ и BD — симедиана треугольника ABC, что доказывает пп. а)-в).

Для доказательства п. г) достаточно заметить, что любые 4 точки можно инверсией перевести в вершины паралелограмма. При этом вершины вписанного четырехугольника перейдут в вершины прямоугольника, а отношение произведений противоположных сторон не изменится. Следовательно, вершины гармонического четырехугольника перейдут в вершины квадрата.

Для доказательства п. д) рассмотрим центральную проекцию, сохраняющую окружность $ABCD$ и переводящую точку пересечения диагоналей четырехугольника в центр. Тогда четырехугольник перейдет в прямоугольник. Поскольку касательные к окружности в противоположных вершинах прямоугольника должны быть параллельны его диагонали, прямоугольник является квадратом.

19. Так как $\mathrm{ctg}\phi = \frac{AB}{BC \sin B} + \mathrm{ctg} C = \frac{BC}{AB \sin B} + \mathrm{ctg} A$, $\mathrm{ctg}^2\phi - \mathrm{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 B}$ или

$$\frac{1}{\sin^2 \phi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}.$$

20. Доказательство такое же, как в задаче 4.

21. Доказательство такое же, как в задаче 5.

3 Точки Брокара в многоугольниках

22. Указание. Докажите, что все прямые $X_i X_{i+1}$ касаются одного эллипса.

23. Ответ.

$$\frac{OL^2}{R^2} + \mathrm{tg}^2\phi\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n} = 1.$$

24. Указание. Рассмотрите повороты многоугольника вокруг O на $\pm\phi$.

25. Доказательство такое же, как при $n = 4$.

26. Доказательство такое же, как при $n = 3$.

27. Указание. T_1, T_2 — предельные точки пучка, порожденного описанной окружностью многоугольника и окружностью OPQ.