А.Заславский, А.Акопян,
О.Заславский, П.Кожевников

ТОЧКИ БРОКАРА

1 Точки Брокара в треугольнике

1. Дан треугольник ABC. Докажите, что существует единственная точка P, такая что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \phi_1$, и единственная точка Q, такая что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \phi_2$.

Определение 1. Точки P и Q называются *точками Брокара* треугольника ABC.

2.
a) Докажите, что $\phi_1 = \phi_2 = \phi$.
b) Выразите ϕ через углы треугольника ABC.

Определение 2. Угол ϕ называется *углом Брокара* треугольника ABC.

3. Докажите, что проекции точек Брокара на стороны треугольника лежат на одной окружности (На самом деле, это верно для любых двух изогонально сопряженных точек).

4. Пусть O — центр описанной окружности ABC.
a) Докажите, что $OP = OQ$.
b) Докажите, что $\angle POQ = 2\phi$.

Определение 3. Прямые, симметричные медианам треугольника относительно соответствующих биссектрис, называются *симедианами*. Можно доказать, что три симедианы пересекаются в одной точке L, которая называется *точкой Лемуана* треугольника.

5. Докажите, что P и Q лежат на окружности с диаметром OL.

6. (К.Кноп) Рассмотрим два треугольника: один образован центрами описанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCA; другой — центрами описанных окружностей треугольников QAB, QBC, QCA. Докажите, что эти треугольники
a) подобны треугольнику ABC;
b) равны.
c) Найдите центр и угол поворота, переводящего один из этих треугольников в другой.

7. Пусть C' — такая точка на стороне AB, что прямая AB является внешней биссектрисой угла $PC'Q$. Докажите, что CC' — симедиана треугольника. (Т.е. можно построить эллипс с фокусами в точках Брокара, касающийся сторон треугольника в основаниях его симедиан).

8. Пусть T_1, T_2 — такие точки на прямой OL, что $\angle LPT_1 = \angle LPT_2 = 60°$. Докажите, что проекции каждой из этих точек на стороны треугольника ABC образуют правильный треугольник (эти точки называются *точками Аполлония*).

2 Точки Брокара в четырехугольнике

9. Дана выпуклая ломаная $ABCD$. Докажите, что существует единственная точка P, такая что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \phi$.

Определение 4. Точку P и угол ϕ будем называть *точкой и углом Брокара* ломаной $ABCD$ и обозначать $P(ABCD)$ и $\phi(ABCD)$.

10. Выразите $\phi(ABCD)$ через длины звеньев ломаной и углы между ними.

11. Докажите, что $\phi(ABCD) = \phi(DCBA)$ тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

В дальнейшем все рассматриваемые многоугольники предполагаются вписанными.

12. Пусть $P_1 = P(ABCD)$, $P_2 = P(BCDA)$, $P_3 = P(CDAB)$, $P_4 = P(DABC)$. Докажите, что четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ — вписанный.

13. Пусть $Q_1 = P(DCBA)$, $Q_2 = P(ADCB)$, $Q_3 = P(BADC)$, $Q_4 = P(CBDA)$. Докажите, что $P_1P_2/Q_1Q_2 = BC/CD$, $P_2P_3/Q_2Q_3 = CD/DA$ и т.д.

14. (Д.Белев) Пусть M_1, M_2 — такие точки на прямых AD, AB соответственно, что $BM \parallel CD$, $CM_2 \parallel DA$.

a) Докажите, что описанные окружности треугольников BAM_1 и BCM_2 пересекаются в точке P_1.

b) Опишите аналогичное построение для точек $P_i, i = 2, \dots, 4$, $Q_i, i = 1, \dots, 4$.

15. (Д.Белев) Докажите, что прямые CP_1, DP_2, AP_3 и BP_4 пересекаются в одной точке, и прямые BQ_1, CQ_2, DQ_3 и AQ_4 также пересекаются в одной точке.

16. (Д.Белев) Обозначим точки, полученные в предыдущей задаче через P_0, Q_0.

a) Докажите, что $S_{P_1P_2P_0} = S_{Q_1Q_2Q_0}$

b) Докажите, что площади четырехугольников $P_1P_2P_3P_4$ и $Q_1Q_2Q_3Q_4$ равны.

17. Докажите, что $\phi(ABCD) = \phi(BCDA)$ тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Определение 5. Вписанный четырехугольник, произведения противоположных сторон которого равны называется *гармоническим*. Из последней задачи следует, что в гармоническом четырехугольнике существуют такие точки P и Q, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA = \angle QDC = \angle QCB = \angle QBA = \angle QAD = \phi$. Точки P, Q будем называть *точками Брокара*, а угол ϕ *углом Брокара* четырехугольника $ABCD$.

18. Докажите, что каждое из следующих условий равносильно тому, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

a) Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются на прямой BD.

b) Диагональ BD является симедианой треугольника ABC.

c) Расстояния от точки пересечения диагоналей L до сторон четырехугольника пропорциональны этим сторонам.

d) Существует инверсия, переводящая точки A, B, C, D в вершины квадрата.

e) Существует центральная проекция, при которой описанная окружность $ABCD$ проектируется в окружность, а сам четырехугольник в квадрат.

19. Выразите угол Брокара через углы гармонического четырехугольника.

20. Докажите, что $OP = OQ$ и $\angle POQ = 2\phi$.

21. Докажите, что P и Q лежат на окружности с диаметром OL.

3 Точки Брокара в многоугольниках

22. Пусть дана окружность, точка P внутри нее и угол ϕ. Для произвольной точки X_0 окружности построим точку X_1, для которой ориентированный угол PX_0X_1 равен ϕ. Аналогично по X_1 построим точку X_2 и т.д. Докажите, что, если $X_n = X_0$, то это выполняется и для любой другой начальной точки.

23. Выведите условие замыкания в предыдущей задаче.

Напоминаем, что все рассматриваемые многоугольники вписанные.

Определение 6. Многоугольник $A_1 \dots A_n$ будем называть *брокаровским* если существует такая точка P, что $\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \cdots \angle PA_nA_1 = \phi$.

24. Докажите, что в брокаровском многоугольнике существует также такая точка Q, что $\angle QA_1A_n = \angle QA_nA_{n-1} = \cdots \angle QA_2A_1 = \phi$.

Определение 7. Точки P, Q и угол ϕ будем называть *точками и углом Брокара* многоугольника $A_1 \dots A_n$.

25. Докажите, что брокаровость равносильна каждому из следующих условий.

a) Существует точка L, расстояния от которой до сторон многоугольника пропорциональны этим сторонам.

b) Симедианы треугольников $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \dots, A_nA_1A_2$, проведенные из вершин $A_2, A_3, \dots, A_1$, пересекаются в одной точке.

c) Точки пересечения прямых $A_1A_3, A_2A_4, \dots, A_nA_2$ с касательными к описанной окружности многоугольника в точках $A_2, A_3, \dots, A_1$ лежат на одной прямой.

d) Существует инверсия, переводящая точки $A_1, \dots, A_n$ в вершины правильного многоугольника.

e) Существует центральная проекция, переводящая описанную окружность многоугольника в окружность, а сам многоугольник в правильный.

26. Докажите, что точки Брокара лежат на окружности с диаметром OL и $\angle POL = \angle QOL = \phi$.

27.

a) Докажите, что существуют две точки T_1, T_2, инверсия с центром в которых переводит точки $A_1, \dots, A_n$ в вершины правильного многоугольника.

b) Докажите, что T_1, T_2 лежат на прямой OL и $\angle T_1PL = \angle T_2PL = \frac{\pi}{n}$.

28. Выразите угол Брокара через отношение OL/R.