

ТРОПИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

А. Заславский, Ф. Нилов, А. Скопенков, М. Скопенков

Краткий обзор.¹

16-я проблема Гильберта спрашивает, *каким может быть количество и взаимное расположение кривых, образующих подмножество плоскости, заданное уравнением $\sum_{i+j \leq d} a_{ij}x^i y^j = 0$* . Более

аккуратная формулировка и примеры приводятся в части А.² Цель данного цикла задач — частичное решение 16-й проблемы Гильберта для $d = 6$, а именно, *построение* требуемых подмножеств в наиболее содержательном случае (см. Основную Теорему ниже).

Для подмножества плоскости, заданного многочленом от двух переменных с некоторыми конкретными коэффициентами, определить число и расположение кривых не так-то просто (даже вооружившись современным компьютером). При решении задач части В Вы нащупаете формулировку основной леммы, которая позволит легко сделать это для многочленов некоторого специального вида. Вы увидите, как при рисовании подмножеств, заданных уравнениями вида $\sum_{i+j \leq d} (a_{ij}x^i y^j)^N = 0$, где N — большое нечетное число, естественно возникает *тропическая геометрия*. Используя ее, Вы сможете строить такие подмножества с различным расположением овалов.

Исходные соображения тропической геометрии элементарны. Заменяем умножение на сложение, а сложение — на операцию, связанную со сложением таким же *дистрибутивным* законом, каким сложение связано с умножением. В качестве такой операции можно взять *максимум* $\max\{a, b\}$ пары чисел a и b . При такой замене функция $\sum_{i+j \leq d} b_{ij}x^i y^j$ перейдет в функцию вида (проверьте!): $f(x, y) = \max_{i+j \leq d} (ix + jy + b_{ij})$. Множество точек излома такой функции называется *тропической кривой*.³

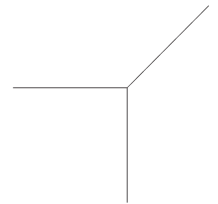


Рис. 1:

Например, прямая на плоскости задается уравнением $Ax + By + C = 0$. Левая часть данного уравнения при нашей замене переходит в функцию вида $f(x, y) = \max\{x + a, y + b, c\}$. Множество точек излома полученной функции $f(x, y)$ имеет вид, показанный на рисунке 1 (проверьте!). Так определяется *тропическая прямая*. Для тропических прямых сохраняются многие свойства обычных прямых. ”Экспериментальной” проверке этих свойств посвящена часть С.

А. Примеры алгебраических кривых.

Многочленом (от двух переменных) называется функция $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой существуют числа d и a_{ij} , $0 \leq i, j \leq d$, такие что $F(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij}x^i y^j$. Вы можете пользоваться без доказательства следующим фактом: *для данной функции F такие числа единственны с точностью до увеличения d и выбора новых a_{ij} равными нулю*.

Множеством нулей многочлена F называется множество $F^{-1}(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$.

A1. Однозначно ли множество $F^{-1}(0)$ определяет многочлен F ?

A2. Какие из следующих множеств являются множествами нулей многочленов?

- (a) прямая; (b) окружность; (c) точка; (d) отрезок; (e) объединение двух прямых; (f) ”хрюшка” (объединение 6 окружностей) на рисунке 2.

¹Не переживайте, если Вам что-нибудь непонятно в этом кратком обзоре. Вы можете пропустить его и начать решать задачи с любой из частей А или С.

²При $d \leq 5$ ответ был известен еще в 19-м веке. Гильберт формулировал свою проблему для $d = 6$, в этом случае решение было получено Гудковым. Для $d = 7$ проблема была решена О.Я. Виро с использованием методов тропической геометрии. Для $d \geq 8$ данный вопрос до сих пор открыт.

³Не следует думать, что многочлену от двух переменных с некоторыми конкретными коэффициентами соответствует какая-то определенная тропическая кривая. Связь между многочленами и тропическими кривыми сложнее. В некотором смысле, тропическая кривая является ”пределом” целого семейства подмножеств, заданных многочленами от двух переменных — см. часть В.

Степень многочлена — это наименьшее возможное число d , для которого найдутся требуемые a_{ij} . (*Комментарий.* Степень — это наибольшее возможное d , для которого $a_{i,d-i} \neq 0$ для некоторого представления многочлена и некоторого i .)

A3. (а) Сколько точек может быть в пересечении прямой с множеством нулей многочлена степени d ?

(б) Множество нулей многочлена нечетной степени неограничено (то есть, не содержится ни в каком в диске).

Многочлен F *приводим*, если $F = G \cdot H$ для некоторых многочленов G и H .

Кривые⁴. Функция $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке t_0 , если для некоторого числа A и любого $\varepsilon > 0$ существует δ , такое, что для любого

$$t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad \text{выполнено} \quad |\gamma(t) - \gamma(t_0) - A(t - t_0)| < \varepsilon|t - t_0|.$$

Отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно рассматривать как упорядоченную пару функций $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Дифференцируемость отображения $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ равносильна дифференцируемости функций γ_1 и γ_2 .

(*Гладкой*) *кривой* на плоскости называется дифференцируемое отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (или $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$). Кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *замкнутой*, если $\gamma(a) = \gamma(b)$.

В задачах A4.cfg и A7 достаточно привести пример многочлена; доказательство его свойств не требуется.

A4. (а) Существует неприводимый многочлен степени 3, множество нулей которого содержит замкнутую кривую.

(б) То же для степени 4.

(с) Существует неприводимый многочлен степени 4, множество нулей которого содержит две замкнутых кривые, одну внутри другой.

(д) Если множество нулей многочлена степени 4 содержит две замкнутых кривые, одну внутри другой, то это множество не содержит никаких других точек.

(е) Верен ли аналог утверждения (д) для неприводимого многочлена степени 5?

(ф) Существует многочлен степени 4, множество нулей которого содержит 4 замкнутые кривые.

(г) Существует многочлен степени 4, множество нулей которого содержит 3 замкнутые кривые.

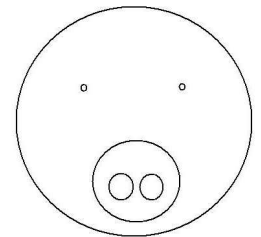


Рис. 2:

Овалы. Компоненты связности, на которые распадается множество нулей многочлена, называются *ветвями*. (Наличие неограниченных ветвей усложняет изучение множеств нулей многочленов.) Для неограниченной ветви B прямые, соединяющие начало координат O с точками на ветви B , стремящимися к "бесконечности", стремятся к некоторой "предельной" прямой. Две неограниченные ветви *элементарно эквивалентны*, если их "предельные" прямые совпадают.

A5. Неограниченные ветви гиперболы $xy = 1$ элементарно эквивалентны.

Две неограниченные ветви *эквивалентны*, если существует соединяющая их цепочка ветвей, в которой каждые две соседние ветви элементарно эквивалентны. Множество нулей многочлена *невырождено*, если все его ветви — гладкие кривые. *Овал* невырожденного множества нулей многочлена — это либо замкнутая кривая (содержащаяся в этом множестве), либо класс эквивалентности неограниченных ветвей. (Заметим, что это определение отлично от "правильного", приводящегося в учебниках.)

A6. Найдите все h , при которых множество нулей невырождено, и посчитайте количество овалов для многочлена

(а) $xy(x + y - 1) - h$. (б) $x^3 - x + h - y^2$. (ответ может зависеть от h).

A7. Существует многочлен степени 5, множество нулей которого невырождено и состоит из 7 овалов.

16-я проблема Гильберта. *Каким может быть количество и взаимное расположение овалов у невырожденного множества нулей многочлена степени d ?*

Мы не приводим формального определения "расположения" овалов. Такое определение потребовало бы понятие *проективизации* многочлена.

⁴Следующие определения нужны только для аккуратного обоснования примеров в задаче A4.

Основная теорема. (а) Существует многочлен степени 6, множество нулей которого невырождено и состоит из 11 овалов.

(б) Существуют три многочлена степени 6, множество нулей каждого из которых невырождено и состоит из 11 овалов, а расположение овалов для всех трех многочленов различно.

В. Тропическая кривая как предел алгебраических.

В1. Нарисуйте множество нулей многочлена

(а) $x - y - 1$; (а') $x^{1001} - y^{1001} - 1$;

(б) $x + y - 1$; (б') $x^{1001} + y^{1001} - 1$;

(с) $xy = x + y$; (с') $x^{1001}y^{1001} = x^{1001} + y^{1001}$;

(д) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$; (д') $x^{2002} + y^{2002} - 4^{1001}x^{1001} - 4^{1001}y^{1001} - 2^{1001}$;

(е') $x^{3003} + 2^{1001}x^{1001}y^{2002} - 3^{1001}x^{1001}y^{1001} + y^{2002} - x^{1001} - 2^{1001}$.

Обозначим через

$$F_N(x, y) = \sum_{i+j \leq d} (a_{ij}x^i y^j)^N$$

семейство многочленов, зависящее от нечетного числа $N \geq 1$.

При замене переменных $u = x^N, v = y^N$ каждый многочлен F_N переходит в многочлен $\sum_{i+j \leq d} a_{ij}^N u^i v^j$ степени d . Поэтому для решения 16-й проблемы Гильберта полезно научиться определять число и расположения овалов для множества $F_N^{-1}(0)$.

В2. Количество овалов для $F_N^{-1}(0)$ может отличаться от количества овалов у $F_1^{-1}(0)$.

Обозначим через B_R круг радиуса R с центром в начале координат 0.

В3. Для любых $\varepsilon, R > 0$ найдется $N_0 > 0$, такое что для всех нечетных $N > N_0$ пересечение множества нулей многочлена

(а) $x^{2N} - x^N - y^N$ с кругом B_R содержится в ε -окрестности объединения прямых $x = 0, x = \pm 1, x = \pm y$ и парабол $y = \pm x^2$.

(б) F с кругом B_R содержится в ε -окрестности объединения множеств нулей всевозможных многочленов $a_{ij}x^i y^j \pm a_{kl}x^k y^l$, в которых $(i, j) \neq (k, l), i + j \leq d, k + l \leq d$.

Обозначим $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ множество положительных чисел и через $\mathbb{R}_+^2 := (0, +\infty)^2$ угол, заданный неравенствами $x > 0, y > 0$. Определим отображение $LOG : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ by $LOG(x, y) = (\log_2 x, \log_2 y)$.

В4. (abcde) Нарисуйте LOG -образ (то есть, образ при отображении LOG) пересечения множеств нулей многочленов (а'б'с'д'е') из задачи В1 с углом \mathbb{R}_+^2 .

Тропическим многочленом называется функция

$$f(x, y) := \max_{i+j \leq d} (ix + jy + b_{ij}).$$

Обозначим множества $f^{pq} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = px + qy + b_{pq}\}$. Некоторые пары таких множеств пересекаются друг с другом (по границе). Объединение всех таких попарных пересечений называется *тропической кривой (степени d)*. (Это в точности множество точек, в которых график функции $f(x, y)$ имеет "излом".)

Далее будем считать, что $a_{ij} \neq 0$ при всех i, j , удовлетворяющих неравенству $i + j \leq d$. Тропическая кривая *соответствует* семейству многочленов F_N , если $b_{ij} = \log_2 |a_{ij}|$. Это определение мотивировано важной задачей В6б ниже.

В5. Нарисуйте тропическую кривую, соответствующую семейству многочленов

(а) $(ax)^N + (by)^N + c^N$? (б) $(ax^2)^N + (2bxy)^N + (cy^2)^N$? (Ответ может зависеть от a, b, c .)

Обозначим через Δ_R треугольник, заданный неравенствами $x \geq -R, y \geq -R, x + y \leq R$.

В6. (а) Для любых $\varepsilon, R > 0$ найдется N_0 , такое что для всех нечетных $N > N_0$ пересечение LOG -образа множества нулей многочлена $x^{2N} - x^N - y^N$ с треугольником Δ_R содержится в ε -окрестности объединения луча $y = 2x, x \geq 0$ и луча $x = 0, y \geq 0$.

(b) Для любых чисел $\{a_{ij}\}_{i+j \leq d}$ и $\varepsilon, R > 0$ найдется $N_0 > 0$, такое что для всех нечетных $N > N_0$ множество $\text{LOG}(F_N^{-1}(0)) \cap \Delta_R$ содержится в ε -окрестности тропической кривой, соответствующей семейству F_N .

С. Тропические прямые и окружности.

Эта часть цикла задач представляет собой художественный конкурс: предлагается экспериментально проверить некоторые теоремы тропической геометрии путем рисования аккуратных чертежей. Избранные рисунки будут выставлены для всеобщего обозрения. "Задачи" C1-C10 не оцениваются (хотя точные формулировки и доказательства каких-нибудь из этих утверждений будут награждаться "плюсиками"). Часть "задачи" можно пропустить, если упоминаемая теорема евклидовой геометрии Вам неизвестна. Вся часть С не нужна для решения 16-й проблемы Гильберта и может быть опущена.

Рассмотрим плоскость с фиксированной системой координат. Тропической прямой ("лапой") называется объединение трех лучей на плоскости, выходящих из одной точки (называемой вершиной), один из которых направлен строго влево, другой строго вниз, а третий (называемый диагональным) — вправо-вверх под углом ровно 45° .

C1. Существуют две различные тропические прямые, пересекающиеся в двух различных точках.

Будем говорить, что две точки находятся в общем положении, если евклидова прямая, проходящая через эти точки, не параллельна координатным осям и прямой $x = y$.

C2. (a) Через две точки общего положения проходит единственная тропическая прямая.

(b) Если вершины двух тропических прямых находятся в общем положении, то эти тропические прямые имеют единственную общую точку.

Будем говорить, что две тропические прямые параллельны, если вершина одной из них лежит на диагональном луче другой.

C3. Пусть точка A и вершина тропической прямой b находятся в общем положении. Тогда через точку A можно провести единственную тропическую прямую, параллельную b .

Будем говорить, что две тропические прямые перпендикулярны, если прямые, которые содержат их диагональные лучи, симметричны относительно прямой $x = y$.

C4. Пусть точка A и вершина тропической прямой b находятся в общем положении. Тогда через точку A можно провести единственную тропическую прямую, перпендикулярную b .

Тропический треугольник ("паук") — это объединение трех тропических прямых, вершины которых находятся (попарно) в общем положении.

C5. Нарисуйте чертежи к тропическим аналогам следующих теорем.

(a) Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

(b) Теорема Паша.

(c) Теорема Дезарга.

Пусть даны две точки A и B . Тропической окружностью ("цаплей") назовем ГМТ X таких, что существуют две перпендикулярные тропических прямые, одна из которых проходит через A и X , а другая — через B и X . (Не забывайте, что через две точки A и X , вообще говоря, можно провести несколько тропических прямых!)

C6. (a) Нарисуйте тропическую окружность. Как зависит это множество от расположения точек A и B ?

(b) У любого ли треугольника существует описанная окружность?

(c) Теорема Паскаля.

C7*. Придумайте понятие середины отрезка в тропической геометрии, так чтобы выполнялась теорема о медианах треугольника.

ТРОПИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

А. Заславский, Ф. Нилов, А. Скопенков, М. Скопенков

Основная серия задач состоит из двух частей - окончания части В и новой части D. Задачи части D не используют (за исключением явно оговоренных случаев) понятий и результатов других частей проекта. Поэтому их можно решать, не принимая участия в других частях проекта.

В. Теорема Виро о склейке.

В3. Для любых $\varepsilon, R > 0$ найдется $N_0 > 0$, такое что для всех нечетных $N > N_0$ пересечение множества нулей многочлена

(с) $x^{2N} - x^N - y^N$ с кругом B_R и с первой четвертью ($x > 0, y > 0$) содержится в ε -окрестности объединения множеств

$$\{(1, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}, \quad 0 \leq x = y \leq 1 \quad \text{и} \quad y = x^2 \geq 1.$$

(d) $x^{2N} - x^N - y^N$ с кругом B_R и со второй четвертью ($x < 0, y > 0$) содержится в ε -окрестности множества, симметричного объединению из (с) относительно оси Oy .

В7. Сформулируйте и докажите аналог пункта В3d для третьей и четвертой четвертей.

В8. Пересечение множества нулей многочлена $x^{2N} - x^N - y^N$ с третьей четвертью пусто.

В9. Для любых $\varepsilon, R > 0$ найдется $N_0 > 0$, такое что для всех нечетных $N > N_0$ пересечение множества нулей многочлена $x^{2N} - x^N - y^N$ с кругом B_R и

(а) первой четвертью содержится в ε -окрестности объединения множеств $\{(1, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$ и $y = x^2 \geq 1$.

(б) второй четвертью содержится в ε -окрестности объединения множеств $0 \leq -x = y \leq 1$ и $y = x^2 \geq 1$.

В10. Сформулируйте и докажите аналог задачи В9 для четвертой четверти.

Сформулируем теорему Виро о склейке, которая позволяет найти число и взаимное расположение овалов для некоторых алгебраических кривых.

В11. Каждая тропическая кривая является конечным объединением отрезков и лучей.

Определение кривой Виро и ее овалов. Возьмем тропическую кривую, соответствующую набору чисел $a_{ij} \neq 0$. Тропическая кривая является конечным объединением *ребер* (отрезков и лучей), которые пересекаются в *вершинах* (т.е. в общих точках ребер). *Гранью* тропической кривой называется компонента связности ее дополнения в плоскости. Каждой грани соответствует пара (p, q) таких чисел, что $px + qy + \log_2 |a_{pq}| = \max_{i+j \leq d, a_{ij} \neq 0} (ix + jy + \log_2 |a_{ij}|)$ для точек (x, y) этой грани, а также соответствует знак коэффициента a_{pq} . В этом определении мы используем не $\{a_{ij}\}$, а тропическую кривую, на гранях которой расставлены пары чисел и знаки⁵.

Перенесем тропическую кривую параллельно, чтобы ее вершины оказались в угле $x > 0, y > 0$. Обозначим через $U_{p,q,00}$ образ при этом переносе грани тропической кривой, на которой стоит пара (p, q) . Обозначим $U_{p,q,01}, U_{p,q,10}$ и $U_{p,q,11}$ — образы множества $U_{p,q,00}$ при симметриях относительно оси x , оси y и $(0, 0)$, соответственно. Продолжим расстановку знаков с первой координатной четверти на всю плоскость по следующему правилу: при отражении области $U_{p,q}$ относительно оси Ox знак области умножается на $(-1)^q$, а при отражении относительно оси Oy — на $(-1)^p$. (То есть, $\text{sgn } U_{p,q,st} = (-1)^{sp+ta} \text{sgn } U_{p,q,00}$.) Определим *кривую Виро* как объединение $\cup \{U_\alpha \cap U_\beta \mid \text{sgn } U_\alpha \neq \text{sgn } U_\beta\}$ тех ребер тропической кривой, которые разделяют грани разных знаков. Две неограниченные компоненты связности кривой Виро называются

- *элементарно эквивалентны*, если они содержат лучи, симметричные относительно точки $(0, 0)$.
- *эквивалентны* если существует последовательность компонент от одной к другой, в которой любые две последовательные компоненты элементарно эквивалентны.

Овалом кривой Виро называется либо замкнутая ломаная, содержащаяся в кривой Виро, или класс эквивалентности компонент связности.

Следующей теоремой разрешается пользоваться без доказательства:

Теорема Харнака. *Невырожденное множество нулей многочлена степени d не может содержать больше $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ овалов.*

В12.* Теорема Виро о склейке. *Пусть кривая Виро, построенная по набору чисел $a_{ij} \neq 0$, содержит ровно $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ овалов. Тогда существует такое N , что множество нулей многочлена*

⁵Пару чисел (p, q) , соответствующую грани, легко восстановить по самой тропической кривой (подумайте, как!)

$\sum_{i+j \leq d} a_{ij}^N u^i v^j$ невырождено, а число и взаимное расположение его овалов такое же, как у соответствующей кривой Виро.

Д. Построение примеров в 16-й проблеме Гильберта.

Цель задач серии D — научиться описывать тропические кривые на чисто комбинаторном языке, и тем самым получить комбинаторный метод построения примеров кривых в 16-й проблеме Гильберта.

Напомним, что *тропическая кривая* степени d — это множество точек излома графика функции $\max_{i+j \leq d} \{ix + jy + b_{ij}\}$ (подробнее см. выше, абзац после задачи B4).

D1. (a) Проверьте, что тропическая кривая степени 1 выглядит так, как показано на рисунке 1. (Сравните с определением тропической прямой в части C).

(b) Из каждой вершины тропической кривой выходит как минимум 3 ребра.

Припишем каждому ребру тропической кривой *кратность* по следующему правилу. Предположим, что в одной из областей, граничащих с этим ребром, максимальной является величина $ix + jy + b_{ij}$, а другой — величина $i'x + j'y + b_{i'j'}$. Тогда прямая, содержащая данный отрезок, задается уравнением $(i - i')x + (j - j')y + (b_{ij} - b_{i'j'}) = 0$. Будем считать *кратностью* данного ребра наибольший общий делитель чисел $i - i'$ и $j - j'$.

Будем обозначать на рисунках кратные ребра тропической кривой двойными (тройными и т.д.) линиями.

D2. Тропические кривые степени d обладают следующими свойствами:

(a) Наклон каждого ребра рационален.

(b) В каждой вершине выполняется следующее условие сбалансированности. Обозначим через v_i вектор с началом в данной вершине, имеющий направление i -го ребра, выходящего из вершины, и равный кратчайшему целочисленному вектору с данным направлением, умноженному на кратность ребра. Тогда $\sum v_i = 0$ для каждой вершины.

(c) Имеется $3d$ бесконечных рёбер, взятых с учетом кратностей, d из которых направлены строго влево, d направлены строго вниз, и d направлены вправо-вверх с углом наклона 45° .

D3. (a) Тропический многочлен $\max_{i+j \leq d} \{ix + jy + b_{ij}\}$ восстанавливается по своей тропической кривой однозначно с точностью до добавления постоянной.

(b) Всякий граф на плоскости с прямыми ребрами и предписанными кратностями, удовлетворяющий свойствам (a), (b) и (c) задачи D2, является тропической кривой степени d .

Мы говорим, что две тропические кривые имеют *одинаковую конфигурацию*, если у них совпадает комбинаторный тип графа и наклон его рёбер (но не обязательно их длины и положение).

D4. Нарисуйте 5 различных конфигураций тропических кривых второй степени.

Для решения следующих задач достаточно прочитать в предыдущем пункте абзац "Определение кривой Виро и ее овалов".

D5. Из какого максимального числа овалов может состоять кривая Виро при $d =$

(a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) 5? (Доказательства максимальной мы не требуем. Сравните ответ с задачами A4f и A7.)

D6*. Напишите программу на компьютере, которая:

(a) рисует все конфигурации тропических кривых данной степени d ;

(b) по данной конфигурации тропической кривой и набору знаков, приписанных областям U_{ij} дополнения к ней, определяет количество овалов у кривой Виро.

D7*. (ab) Докажите Основную теорему (разрешается пользоваться теоремой Виро о склейке без доказательства).

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

A1. Ответ: нет. Например, прямая $x = 0$ является множеством нулей разных многочленов $F(x, y) = x$ и $G(x, y) = x^2$.

A2. Ответ: a, b, c, e, f.

Примеры. (a) Любая прямая на плоскости задается уравнением $Ax + By + C = 0$ с некоторыми числами A, B, C .

(b) Уравнение окружности: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$, где (x_0, y_0) — координаты центра, R — радиус.

(c) Уравнение точки (x_0, y_0) : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$.

(e) Уравнение объединения двух прямых: $(Ax + By + C)(ax + by + c) = 0$, где $Ax + By + C = 0$ — уравнение первой, $ax + by + c = 0$ — уравнение второй прямой.

(f) Уравнение объединения 6 окружностей: $\prod_{k=0}^6 ((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 - R_k^2) = 0$, где $(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 - R_k^2 = 0$ — уравнение k -й окружности.

Невозможность в пункте (d) напрямую следует из задачи A3a.

A3. (a) Ответ: либо от 0 до d , либо прямая содержится в нашем множестве нулей.

Параметризуем прямую l : $x = x_0 + \alpha \cdot t$, $y = y_0 + \beta \cdot t$. Подставляя эти выражения в многочлен, получим многочлен $P(t)$ степени не более, чем d . Многочлен $P(t)$ либо имеет не более, чем d вещественных корней, либо тождественно равен 0.

Покажем, что для любого $d' < d$, существует кривая степени d и прямая l , которые пересекаются в d' точках. Рассмотрим уравнения d прямых, отличных от l , среди которых ровно $d - d'$ параллельны l . Произведение этих уравнений является нужным многочленом.

Обозначим через d степень данного многочлена $F(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j$. Покажем, что существует невырожденная замена координат $x = \alpha_1 x' + \beta_1 y'$, $y = \alpha_2 x' + \beta_2 y'$ (невырожденность означает, что $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$), после которой коэффициент при одночлене $(x')^d$ будет ненулевым.

Коэффициент $A(\alpha_1, \alpha_2)$ при одночлене $(x')^d$ равен $\sum_{i+j \leq d} a_{ij} \alpha_1^i \alpha_2^j$. Так как не все a_{ij} равны 0, то существуют такие α_1 и α_2 , не равные одновременно нулю, что $A(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$. Подбирая коэффициенты β_1 и β_2 , так, чтобы они не были пропорциональны α_1 и α_2 (т.е. чтобы $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$), мы получим нужную замену.

Вернемся к решению задачи. Так как при замене из леммы ограниченные множества переходят в ограниченные, то можно считать, что коэффициент при x^d ненулевой. Так как d нечетно, то для каждого y уравнение $F(x, y) = 0$ имеет решение. Значит, $F^{-1}(0)$ неограничено.

A4. (a) Например, подойдет многочлен $xy(x + y - 1) + \frac{1}{100}$.

Обозначим через ϕ множество его нулей. Покажем, что данный многочлен неприводим. Действительно, иначе он разлагается на произведение многочленов, степень одного из которых равна 1. Поэтому ϕ содержит прямую. Эта прямая обязана пересекать одну из прямых Ox и Oy , которые не пересекают ϕ . Полученное противоречие доказывает неприводимость.

Координаты x точек пересечения прямой $y = c$ с ϕ удовлетворяют уравнению $x^2 + (c - 1)x + \frac{1}{100c} = 0$. Дискриминант $D = D(c)$ этого уравнения равен $(c - 1)^2 - \frac{1}{25c}$. Равенство $D(c) = 0$ равносильно равенству $f(c) := 25c(c - 1)^2 - 1 = 0$. Это уравнение третьей степени, которое имеет не более трёх корней. Поскольку $f(\frac{1}{100}) < 0$, $f(\frac{1}{2}) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, то два корня c_1 и c_2 уравнения $f(c) = 0$ лежат на интервале $(0, 1)$, а третий корень лежит на интервале $(1, 2)$. Поэтому $D(c) = 0$ ровно в двух точках c_1 и c_2 интервала $(0, 1)$, причём $D(c) > 0$ для любого $c \in (c_1, c_2)$ и $D(c) < 0$ для остальных точек этого интервала. (Для определённости считаем, что $c_1 < c_2$.) Значит, при c , равном c_1 или c_2 , прямая $y = c$ пересекает ϕ ровно в одной точке. Поэтому при $c \in (c_1, c_2)$ прямая $y = c$ пересекает ϕ в двух точках $(x_1(c), c)$ и $(x_2(c), c)$, где $x_{1,2}(c) = \frac{\pm \sqrt{D} - (c - 1)}{2}$. При остальных значениях $c \in (0, 1)$ прямая $y = c$ не пересекает ϕ .

Определим

$$\gamma : [c_1, 2c_2 - c_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{формулой} \quad \begin{cases} (x_1(t), t) & t \in [c_1, c_2] \\ (x_2(2c_2 - t), 2c_2 - t) & t \in [c_2, 2c_2 - c_1] \end{cases}$$

Так как функции $x_1(c)$ и $x_2(c)$ дифференцируемые, то отображение $\gamma(t)$ дифференцируемое в точках, отличных от c_2 . Так как $2c_2 - t = t$ для $t = c_2$ и $(x_1)'(c_2) = (x_2)'(c_2)$, то отображение $\gamma(t)$ гладкое во всех точках. Теперь ясно, что $\gamma(I)$ есть замкнутая кривая, содержащаяся в кривой ϕ .

(b) Указание. Рассмотрите многочлен $(x + 1)(x - 1)(y + 1)(y - 1) + \frac{1}{100}$.

(с) Указание. Рассмотрите многочлен $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) + \frac{1}{100}$.

(d) Предположим противное, пусть есть хотя бы одна другая точка X . Рассмотрим точку Y внутри внутренней замкнутой кривой. Тогда прямая XY пересечёт множество нулей данного многочлена не менее, чем в пяти точках, что противоречит утверждению задачи А3(а).

(е) Ответ. Нет. Указание. Рассмотрите многочлен $x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) + \frac{1}{100}$.

(f) Указание. Рассмотрите многочлен $(x^2 + 2y^2 - 3)(2x^2 + y^2 - 3) + \frac{1}{100}$.

(g) Указание. Рассмотрите многочлен $(x^2 + y^2 - 1)(x - y - 1)(x + y - 1) + \frac{1}{100}$.

А5. Направление прямой OM , соединяющей начало координат O с точкой $M(x, y)$ ветви гиперболы $xy = 1$, лежащей в положительном квадранте, стремится к направлению прямой Ox при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому Ox является предельной прямой для ветви гиперболы $xy = 1$, лежащей в положительном квадранте. Аналогично она является предельной прямой для другой ветви гиперболы. Поэтому ветви гипербол эквивалентны.

А6. (а) Ответ: При $h < 0$ — один овал, при $h \in (0, 1/27)$ — два овала, при $h > 1/27$ — один овал. При $h = 0$ и $h = 1/27$ алгебраическая кривая вырождена. Приведем решение.

Обозначим $f(x, y) := xy(x + y - 1) + h$. Введём обозначения для точек пересечения прямых Ox , Oy и $x + y - 1 = 0$ и областей, на которые эти прямые разбивают плоскость:

$$A := (1, 0), \quad B := (0, 1),$$

$$C := (0, 0), \quad X := \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}, \quad X_A := y < 0, x + y > 1, \quad X_B := x < 0, x + y > 1, \\ X_C := x < 0, y < 0, \quad Y_A := x < 0, y > 0, x + y < 1, \quad Y_B := x > 0, y < 0, x + y < 1, \quad Y_C := x > 0, y > 0, x + y > 1.$$

Ясно, что $f(x, y) = h$ в точках прямых Ox , Oy и $x + y - 1 = 0$, $f(x, y) < h$ в точках областей X_A , X_B , X_C и X , а также $f(x, y) > h$ в точках областей Y_A , Y_B и Y_C . Поэтому при $h > 0$ нули многочлена $f(x, y)$ могут лежать только в X_A , X_B , X_C и X , при $h < 0$ они могут лежать только в Y_A , Y_B и Y_C .

Пусть $h < 0$. Обозначим $y_A := Y_A \cap f^{-1}(0)$. Аналогично определим y_B и y_C .

Докажем, что y_A является связной компонентой множества $f^{-1}(0)$ нулей f . Координаты x точек пересечения прямых $y = c$ с $f^{-1}(0)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + (c - 1)x + \frac{h}{c} = 0$. Дискриминант $D = D(c)$ этого уравнения равен $(c - 1)^2 - \frac{4h}{c}$. Поскольку $h < 0$, то для любого $c \in R_+$, $D(c) > 0$. Значит, каждая из прямых $y = c$, где $c \in R_+$, пересекает F ровно в двух точках $(x_{1,2}(c), c)$, таких, что $x_{1,2}(c) = \frac{\pm\sqrt{D} - (c - 1)}{2}$.

Определим

$$\gamma : R_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{формулой} \quad \left\{ (x_2(t), t) \quad t \in R_+ \right\}.$$

Так как функция $x_2(c)$ гладкая, то отображение $\gamma(t)$ гладкое. Поскольку $\gamma(R_+) = y_A$, то y_A является связной компонентой множества $f^{-1}(0)$ нулей f . Аналогично y_B и y_C являются связными компонентами множества $f^{-1}(0)$ нулей f .

Нетрудно проверить, что направление прямой Ox является предельным для ветви y_C .

Аналогично, это направление является предельным для ветви y_A . Поэтому ветви y_A и y_C элементарно эквивалентны. Аналогично, ветви y_A и y_B элементарно эквивалентны, поскольку направление прямой $x + y - 1 = 0$ является для этих ветвей предельным. Значит, ветви y_A , y_B и y_C эквивалентны и поэтому образуют один овал.

При $h = 0$ алгебраическая кривая f вырождена.

Пусть $h > 0$. Введём обозначения

$$x := X \cap f^{-1}(0), \quad x_A := X_A \cap f^{-1}(0), \quad x_B := X_B \cap f^{-1}(0) \quad \text{и} \quad x_C := X_C \cap f^{-1}(0).$$

Связность и эквивалентность x_A , x_B и x_C устанавливается аналогично случаю $h < 0$. Поэтому они образуют один овал при любом $h > 0$. Если множество x не пусто и не представляет собой одну точку, то оно является овалом (доказательство аналогично решению задачи А4а).

Покажем, что множество точек x не пусто только при $h \in (0, \frac{1}{27}]$. Ясно, что x пусто тогда и только тогда, когда $D(c) < 0$ при любом $c \in (0, 1)$. Производная $D'(c) > 0$ при $c \in (0, 1/3)$, $D'(c) = 0$ при $c = 1/3$, $D'(c) < 0$ при $c \in (1/3, 1)$. Поэтому в точке $c = 1/3$ достигается максимум функции $D(c)$ на интервале $(0, 1)$. Значит, $D(c) < 0$ при любом $c \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда $D(1/3) = 4/9 - \frac{4h}{c} < 0$, т.е. $h > 1/27$. При $h = 1/27$ множество x состоит из одной точки. Таким образом, при $h \in (0, 1/27)$ множество нулей $f^{-1}(0)$ состоит из двух овалов, при $h = 1/27$ алгебраическая кривая вырождена, при $h > 1/27$ множество $f^{-1}(0)$ состоит из одного овала.

(b) Ответ: Один овал при $h \in (-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}})$, два овала при $h \in (-\infty, -\frac{2}{3\sqrt{3}})$ и $h \in (\frac{2}{3\sqrt{3}}, \infty)$, алгебраическая кривая $x^3 - x + h - y^2$ вырождена при $h = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Указание. Аналогично (а).

A7. Указание. Рассмотрите многочлен $x((x-1)^2 + y^2 - 2)((x+1)^2 + y^2 - 2) + \frac{1}{100}$.

B1. (a') Указание. См. рисунок 3.a'. Обоснуем рисунок. Ясно, что множество нулей многочлена $x^{2001} - y^{2001} - 1$ лежит "ниже" прямой $y = x$ и симметрично относительно прямой $x + y = 0$. Поэтому мы можем рассматривать только случай $y > -x$. Точки $(0, -1)$ и $(1, 0)$ являются точками пересечения нашего множества с осями координат. Если $x = 1 + \epsilon$, где $\epsilon > 0$, то для y выполнено неравенство $(1001\epsilon)^{\frac{1}{1001}} < y < 1 + \epsilon$. Поэтому, при достаточно малых значениях ϵ , значения y могут изменяться от 0 до 1. При $\epsilon > 1/1001$ значения x и y приблизительно равны. Если $1 - \epsilon < x < 1$, где ϵ достаточно мало, значения y могут изменяться от -1 до 0. Аналогично разбирается случай $y < -x$.

(b') Указание. См. рисунок 3.b'. Аналогично (a').

(c') Указание. См. рисунок 3.c'. Ясно, что множество нулей многочлена $x^{1001}y^{1001} - x^{1001} - y^{1001}$ симметрично относительно прямой $y = x$. Поэтому можно рассматривать только случай $x \geq y$. При $x < 0$ выполнено $y > x$. При $x \in [0, 1000/1001]$ значение y приблизительно равно x . При $x \in [1000/1001, 1]$ значение y изменяется от -1 до $-\infty$. При $x \in (1, 1002/1001)$ выполнено $y > x$. При $x \geq 1002/1001$ значение y приблизительно равно 1.

(d') Указание. См. рисунок 3.d'. Ясно, что множество нулей многочлена $x^{2002} + y^{2002} - 4^{1001}x^{1001} - 4^{1001}y^{1001} - 2^{1001}$ симметрично относительно прямой $y = x$. Поэтому можно рассматривать только случай $x \geq y$. Точек с координатой $x \geq 4$ среди множества нулей нашего многочлена нет. При $x \in (-1/2, 1/2]$ значение y приблизительно равно $-1/2$. При $x \in (1/2, 4003/1001]$ значение y приблизительно равно $-x$. При $x \in (4003/1001, 4)$ значение y изменяется от -4 до 4.

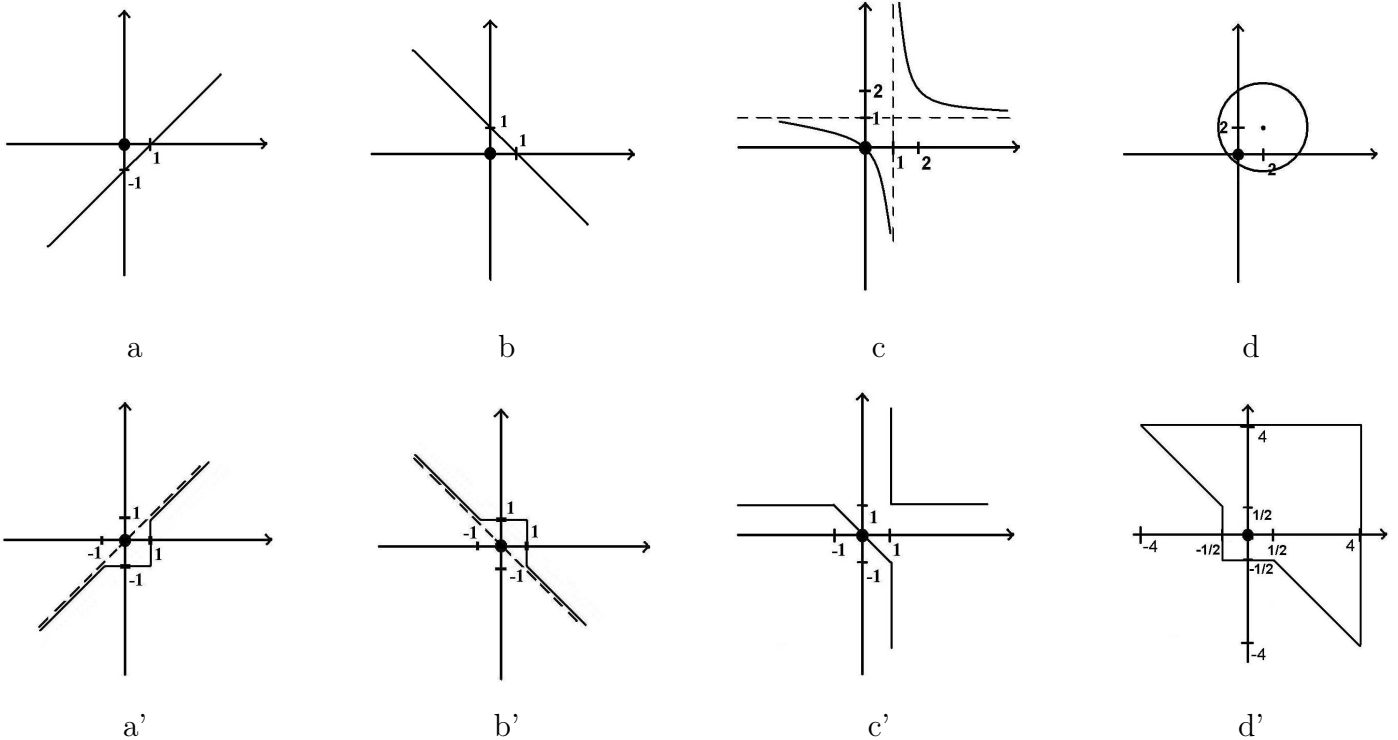


Рис. 3:

B2. Пусть $F(x, y) = x^3 - px + q - y^2$, где $p, q > 0$. Тогда множество нулей многочлена F состоит из двух овалов, если многочлен $f(x) = x^3 - px + q$ имеет три действительных корня, и из одного овала, если $f(x)$ имеет один действительный корень. Приравняв производную многочлена f к нулю, убеждаемся, что он имеет локальный максимум в точке $x_1 = -\sqrt{p/3}$ и локальный минимум в точке $x_2 = \sqrt{p/3}$. Соответственно, $f(x)$ имеет три корня тогда и только тогда, когда $f(x_2) < q < f(x_1)$, т.е. $4p^3 > 27q^2$. Аналогично получаем, что множество нулей многочлена $F_N(x, y)$ состоит из двух овалов при $4p^{3N} > 27q^{2N}$ и из одного овала в противном случае. Очевидно, что при $1 < \frac{p^3}{q^2} < \frac{27}{4}$ первое неравенство не выполняется, а второе выполняется при достаточно больших N .

B3. (a) Пункт (a) является частным случаем пункта (b).

(b) Указание. Предположим, что в некоторой точке (x, y) значения всех одночленов $a_{ij}x^i y^j$ различны по абсолютной величине, причем $|a_{kl}x^k y^l| > |a_{ij}x^i y^j|$ для всех пар $(i, j) \neq (k, l)$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ $|\frac{a_{ij}x^i y^j}{a_{kl}x^k y^l}|^N \rightarrow 0$. Следовательно, при всех достаточно больших N $|a_{kl}x^k y^l|^N$ превосходит сумму абсолютных

величин остальных одночленов и равенство $F_N(x, y) = 0$ невозможно. Поэтому множество $F_N^{-1}(0)$ при больших N стремится к некоторому подмножеству объединения множеств, задаваемых равенствами вида $|a_{ij}x^i y^j| = |a_{kl}x^k y^l|$.

Решение. Пусть дано $\epsilon, R > 0$. Обозначим через Γ объединение всех кривых, задаваемых уравнениями $a_{ij}x^i y^j \pm a_{kl}x^k y^l = 0$. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in B_R$ на расстоянии больше ϵ от Γ . Будем считать, что эта точка лежит в той части $\mathbb{R}^2 - \Gamma$, в которой максимальное по модулю значение принимает одночлен $a_{kl}x^k y^l$. Пусть $(x_1, y_0) \in \Gamma$ — ближайшая к (x_0, y_0) точка на прямой $y = y_0$. Тогда $|y_1 - y_0| > \epsilon$ и $|a_{ij}x_1^i y_0^j| = |a_{kl}x_1^k y_0^l|$ для некоторых i, j .

Оценим отношение

$$\frac{a_{ij}x_0^i y_0^j}{a_{kl}x_0^k y_0^l} = \frac{a_{ij}}{a_{kl}} x_0^{i-k} y_0^{j-l} = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{i-k}$$

Так как $|a_{kl}x_0^k y_0^l| > |a_{ij}x_0^i y_0^j|$, то $|x_0/x_1| < 1$. Поскольку $|x_0|, |x_1| < R$, то $|x_0/x_1| < 1 - \epsilon/R$. Значит, для любых i, j наше отношение

$$\frac{|a_{ij}x_0^i y_0^j|}{|a_{kl}x_0^k y_0^l|} < 1 - \epsilon/R.$$

Следовательно, при всех N , удовлетворяющих неравенству $d^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{R}\right)^N < 1$ одночлен $|a_{kl}x_0^k y_0^l|^N$ превосходит сумму абсолютных величин остальных одночленов и равенство $F_N(x_0, y_0) = 0$ невозможно. Задача решена.

(с) Непосредственно следует из утверждения предыдущей задачи, примененного к многочлену $F_N = x^{2N} - x^N - y^N$.

(д) Множество нулей многочлена $x^{2N} - x^N - y^N$, лежащих во второй четверти, симметрично относительно оси ординат множеству нулей многочлена $x^{2N} + x^N - y^N$, лежащих в первой четверти. Поэтому требуемое утверждение непосредственно следует из утверждения пункта б)

В4. (а) *Указание.* См. рис. 4.а. Обоснуем рисунок. Ясно, что множество нулей функции $f(x, y) := 2^{1001x} - 2^{1001y} - 1$ лежит "правее" оси Oy . При $y < 0$ значение x приблизительно равно 0, а при $y > 0$ значение x приблизительно равно y .

(б) *Указание.* См. рис. 4.б. Обоснование аналогично (а).

(с) При $x \in (0, 1/1001)$ значения y изменяются от 0 до $+\infty$, при $x \geq 1/1001$ значение y приблизительно равно 0.

(д) Ясно, что множество нулей функции $f(x, y) := 2^{2002x} + 2^{2002y} - 4^{1001}2^{1001x} - 4^{1001}2^{1001y} - 2^{1001}$ симметрично относительно прямой $y = x$. Поэтому можно рассматривать только случай $x \geq y$. При $x \geq 2003/1001$ значение y приблизительно равно $x/2 + 1$, при $x \in (2, 2003/1001)$ значение y изменяется от $-\infty$ до 2.

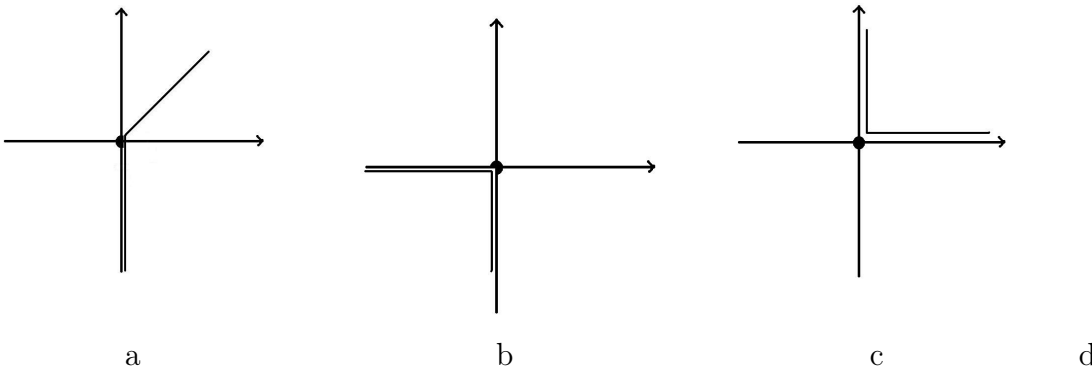


Рис. 4:

В6. (а) Рассуждая, как в задаче В3б, получаем, что пересечение множества нулей с первой координатной четвертью лежит вблизи объединения множеств $x^2 = y \geq x$, $x^2 = x \geq y$, $x = y \geq x^2$. Однако, коэффициенты при одночленах x^N и y^N у данного многочлена имеют одинаковые знаки, так что в окрестности последнего множества F_N не может обращаться в нуль. При логарифмическом отображении первое из указанных множеств переходит в луч $y = 2x$, $x \geq 0$, а второе — в луч $x = 0$, $y \leq 0$.

(б) Аналогично предыдущему пункту получаем, что множество нулей многочлена F_N при больших N лежит в окрестности объединения множеств, задаваемых соотношениями $a_{ij}x^i y^j = a_{kl}x^k y^l \geq a_{pq}x^p y^q$.

При логарифмическом отображении эти множества переходят в множества вида $ix + jy = kx + ly \geq px + qy$, каждое из которых является отрезком или лучом. Объединение этих множеств задает тропическую кривую.

В7. Рассуждая аналогично задаче В3d, получаем, что множества, содержащие пересечения множества нулей с первой и четвертой четвертью, симметричны относительно оси абсцисс, а с первой и третьей — относительно начала координат.

В8. Так как в третьей четверти $x < 0, y < 0$, то все одночлены, входящие в многочлен F_N положительны, т.е. равенство $F_N(x, y) = 0$ невозможно.

В9. (а) Решение аналогично решению задачи В6а.

(б) Из задачи В3d следует, что пересечение множества нулей с второй четвертью лежит в окрестности множеств $x^2 = y \geq -x, x^2 = -x \geq y, -x = y \geq x^2$. Поскольку знаки одночленов $-x^N$ и x^{2N} во второй четверти совпадают, то пересечение множества нулей со второй четвертью содержится в окрестности только первого и третьего из указанных множеств.

В10. Рассуждая, как в задаче В9b, получаем, что искомое пересечение содержится в окрестности объединения множеств $(1, y), 0 \geq y \geq -1$ и $0 \leq x = -y \leq 1$.

В11. Каждое ребро тропической кривой задается системой из одного уравнения и нескольких неравенств вида $ix + jy + b_{ij} = kx + ly + b_{kl} \geq px + qy + b_{pq}$. Если эта система совместна, то уравнение определяет прямую, а неравенства высекают на этой прямой отрезок или луч.

В12. *Указание.* Действительно, рассмотрим отдельно поведение множества нулей многочлена $F_N(x, y)$ в каждом из четырёх квадрантов. Отображение $LOG : (\mathbb{R} - \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\log_2 |x|, \log_2 |y|)$ переводит каждый из квадрантов на плоскость взаимно однозначно. Выберем один из квадрантов (например, $x, y > 0$), и отождествим его с плоскостью указанным отображением. Тропическая кривая, задаваемая тропическим многочленом $\max_{i+j \leq d} \{ix + jy + b_{ij}\}, b_{ij} = \log_2 |a_{ij}|$ разбивает тропическую плоскость на области. Внутри каждой области поведение многочлена $F_N(x, y)$ определяется поведением одного из мономов $(a_{ij}x_i y_j)^N$, и в зависимости от знака коэффициента a_{ij} (а также выбранного квадранта) многочлен F_N в данной области либо положителен, либо отрицателен. Закрасим каждую из областей дополнения к тропической кривой в один из двух цветов, в соответствии со знаком многочлена F_N в этой области. Если две соседние области, граничащие вдоль некоторого ребра, окрашены в разные цвета, то по тереме о промежуточном значении вдоль этого ребра проходит ветвь множества нулей многочлена F_N . Если же обе соседние области окрашены в одинаковые цвета, то вблизи этого ребра нет вещественных точек кривой. Таким образом, для больших нечетных значений параметра N множество нулей многочлена F_N (в выбранном квадранте) приближённо изображается набором некоторого количества явно перечисляемых рёбер тропической кривой, а множество нулей многочлена F_N во всей плоскости приближённо задается кривой Виро.

В принципе, множество нулей многочлена F_N могло бы иметь больше ветвей, чем у кривой Виро — например, могли бы существовать "маленькие" овалы вблизи вершин тропической кривой. Отсутствие "лишних" ветвей (и овалов) гарантирует нам предположение, что число овалов у кривой Виро равно $(d-1)(d-2)/2 + 1$ и теорема Харнака.

Замечание. Авторам задачи неизвестно, остается ли верной теорема о склейке Виро без предположения, что число овалов у кривой Виро равно $(d-1)(d-2)/2 + 1$.

С5. (а) См. рис. 5.a

(б) См. рис. 5.b.

(с) См. рис. 6.

D1. (а) *Указание.* Функция $\max\{x + a, y + b, c\}$ имеет следующее поведение. При x и y отрицательных и больших по абсолютной величине максимальным из трёх величин является постоянное значение c . При увеличении x значение функции не меняется до тех пор, пока точка (x, y) не пересечет вертикальную прямую $x + a = c$. Правее этой прямой максимальной является величина $x + a$. Аналогично, при движении точки (x, y) вверх переход к величине $y + b$ осуществляется на горизонтальной прямой $y + b = c$, вдоль которой максимум достигается на двух конкурирующих выражениях $y + q$ и c . Наконец, области, в которых значение функции $f(x, y)$ совпадает с выражениями $x + a$ и $y + b$, разделяются лучом прямой $x + a = y + b$, имеющей наклон 1. Все три полученных луча сходятся в точке $(c - a; c - b)$.

D2. (а) Очевидно.

(б) *Указание.* Рассмотрим вершину кривой и предположим, что к этой вершине подходит r областей (дополнения к тропической кривой), в которых максимум достигается на функциях $i_1 x + j_1 y + b_{i_1 j_1}, \dots, i_r x +$

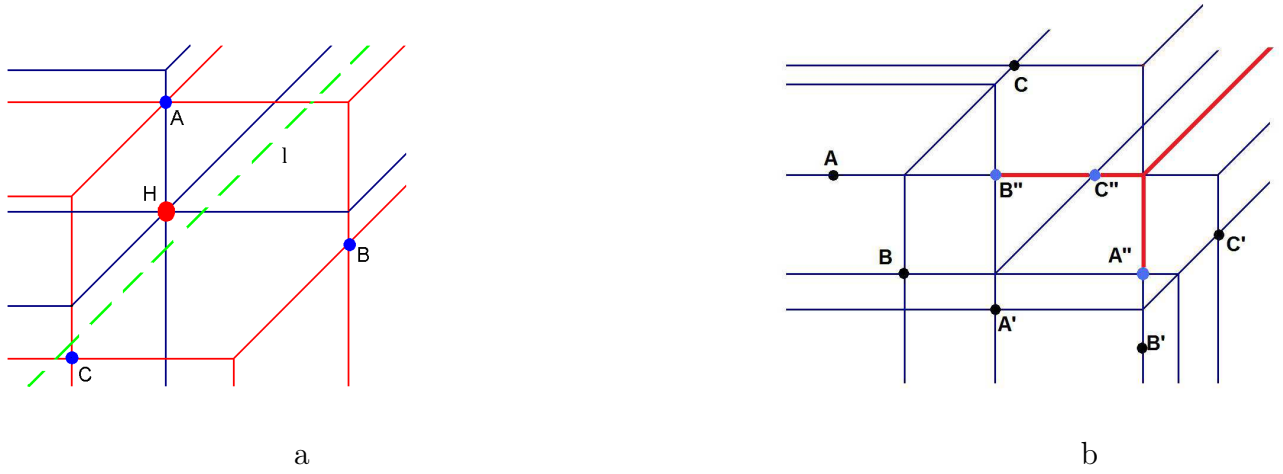


Рис. 5:

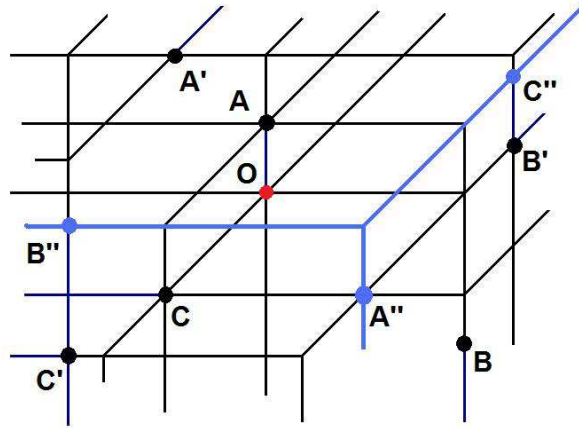


Рис. 6:

$j_r y + b_{i_r j_r}$, соответственно (мы считаем области занумерованными против часовой стрелки). Тогда, очевидно, выполняется векторное равенство

$$\begin{pmatrix} i_2 - i_1 \\ j_2 - j_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} i_r - i_{r-1} \\ j_r - j_{r-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 - i_r \\ j_1 - j_r \end{pmatrix} = 0.$$

Осталось заметить только, что вектор $\begin{pmatrix} i_{s+1} - i_s \\ j_{s+1} - j_s \end{pmatrix}$ отличается от вектора v_s , участвующего в условии сбалансированности, только лишь поворотом на 90° .

(с) *Указание.* Докажем, например, что тропическая кривая степени d имеет (с учетом кратности) ровно d горизонтальных лучей, направленных влево. Действительно, будем рассматривать только ту часть плоскости, в которой координата x отрицательна и очень велика по абсолютной величине. Ясно, что в этой части максимальной может быть только одна из величин $j y + a_{0j}$, $j = 0, 1, \dots, d$. Ясно также, что в этой части при больших по абсолютной величине отрицательных y максимальна величина a_{00} , а при больших по абсолютной величине положительных y максимальна величина $d y + a_{0d}$. Пусть при увеличении y максимальными последовательно становятся величины a_{00} , $j_1 y + a_{0j_1}$, $j_2 y + a_{0j_2}$, \dots , $j_k y + a_{0j_k}$, $d y + a_{0d}$. Легко видеть, что $0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k < d$. Тогда кратности горизонтальных ребер равны j_1 , $j_2 - j_1$, \dots , $d - j_k$. Поэтому количество горизонтальных ребер с учетом кратности равно $(j_1) + (j_2 - j_1) + \dots + (d - j_k) = d$.

D3. (ab) Указание. Действительно, предположим, что в некоторой области тропический многочлен совпадает с линейной функцией $ix + jy + b_{ij}$. Пусть прямая, содержащая отрезок границы этой области, имеет уравнение $px + qy + r = 0$. Тогда в соседней области, граничащей с исходной вдоль отрезка, многочлен совпадает с линейной функцией $(i + p)x + (j + q)y + (b_{ij} + r)$. Иными словами, мы устанавливаем равенство $b_{i+p, j+q} = b_{i,j} + r$. Продолжая таким же образом, мы восстанавливаем весь многочлен область за областью по индукции. Условие сбалансированности гарантирует нам, что в процессе построения мы никогда не придём к противоречию. Условие поведения тропической кривой на бесконечности обеспечит наличие только тех "тропических мономов", полученных в процессе построения, которые только и возможны для тропических многочленов данной степени.

D4. Указание. Как и для обычной гиперболы, тропическую кривую второй степени можно получить, пошевелив слегка объединение двух тропических прямых. Объединение двух тропических прямых задается суммой двух тропических многочленов первой степени. У графа, являющегося множеством точек излома такой суммы, имеется вершина валентности 4, в которой максимум достигается одновременно на четырёх конкурирующих линейных функциях. После небольшого шевеления одной из этих линейных функций точка валентности четыре распадается на две точки валентности три. Некоторые из возможных тропических кривых второй степени приведены на рис. .

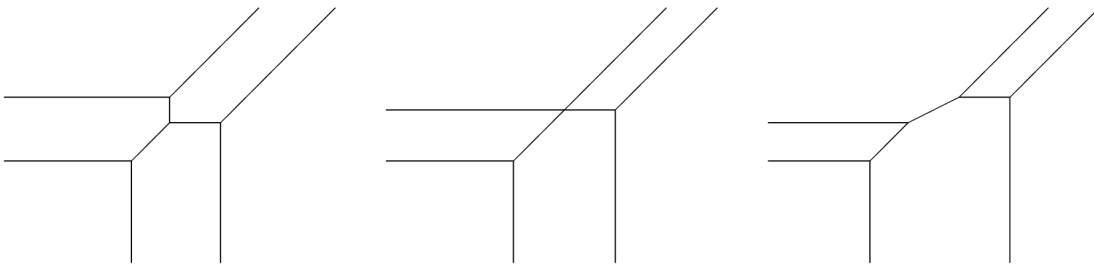


Рис. 7: Вырожденная тропическая кривая второй степени и два её шевеления

D5. Ответ. (a) 1; (b) 2; (c) 4; (d) 7.

D7. (b) Разбиения диаграммы Ньютона. При решении задачи части D7 может оказаться полезным следующее "двойственное" описание конфигураций тропических кривых. Рассмотрим на плоскости треугольник с вершинами $(0; 0)$, $(0, d)$ и $(d, 0)$. Этот треугольник называется *треугольником Ньютона* тропического многочлена. Со всякой тропической кривой связывается некоторое разбиение треугольника Ньютона на выпуклые многоугольники с целочисленными вершинами. А именно, рассмотрим область в дополнении к тропической кривой, в которой максимальной является величина $ix + jy + b_{ij}$. Этой области мы сопоставим вершину с координатами (i, j) на треугольнике Ньютона. Ребру тропической кривой, разделяющему две области, сопоставляется отрезок на диаграмме Ньютона, соединяющий вершины, отвечающие этим двум областям. Наконец, всякой вершине тропической кривой, к которой подходит r областей её дополнения, соответствует r -угольник на диаграмме Ньютона, вершины которого отвечают этим r областям. В частности, бесконечным областям соответствуют вершины разбиения, входящие в границу диаграммы, а бесконечным ребрам — отрезки границы диаграммы. Полезно отметить, что направление всякого ребра тропической кривой ортогонально направлению двойственного ребра разбиения диаграммы.

Алгоритм построения кривых Виро. Процедуру построения кривых Виро удобно переформулировать на двойственном языке диаграмм Ньютона. Эта процедура, носящая название "patchworking" (склейка Виро), состоит в последовательном выполнении следующих шагов (см. результат на рис.).

1. Выбираем произвольную триангуляцию диаграммы Ньютона Δ с вершинами в целых точках;
2. Расставляем в вершинах триангуляции знаки, $+$ или $-$, произвольным образом.
3. Отразив диаграмму Ньютона вместе с её триангуляцией последовательно относительно координатных осей, получаем триангуляцию квадрата $|i| + |j| \leq d$, называемого *расширенной диаграммой Ньютона*.
4. Продолжим расстановку знаков на вершины расширенной диаграммы Ньютона, используя следующее правило: знак вершины $(e_1 i, e_2 j)$ отличается от знака вершины (i, j) множителем $e_1^i e_2^j$, где $e_1, e_2 = \pm 1$.

5. В каждом из треугольников построенной триангуляции расширенной диаграммы Ньютона соединим отрезком середины тех сторон, на концах которых стоят разные знаки (если таковые имеются). Объединение всех построенных отрезков задает ломаную линию на расширенной диаграмме Ньютона. Эта линия и является комбинаторной моделью кривой Виро.
6. Отождествим между собой противоположные точки границы расширенной диаграммы Ньютона. Тогда некоторые ветви комбинаторной модели кривой Виро склеятся в *овалы*.

Литература.

- [1] М.Э. Казарян, Тропическая геометрия, Материал курса летней школы "Современная математика".
<http://www.mscme.ru/dubna/2006/notes/Kazaryan.pdf>
- [2] О. Ya. Viro, Introduction into Topology of Real Algebraic Varieties.
<http://www.math.uu.se/~oleg/es/index.html>.

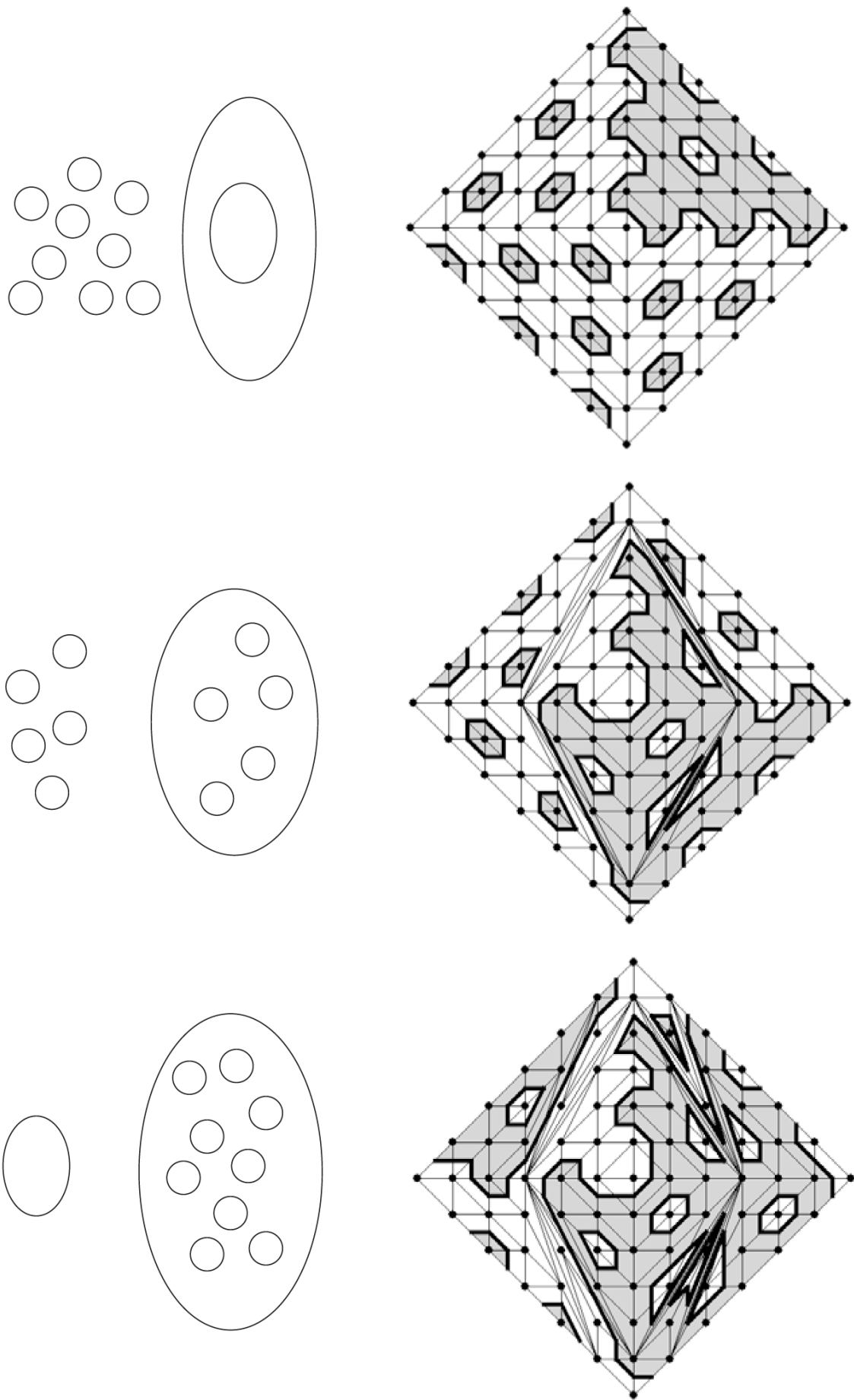


Рис. 8: