

Раскраски и кластеры

А. Белов-Канель,

И. Иванов-Погодаев, А. Малистов, М. Харитонов

18. Слой между двумя параллельными прямыми раскрашен в 2 цвета. Докажите, что в нём найдутся 2 одноцветные точки на единичном расстоянии.
- 19* Слой между двумя параллельными плоскостями раскрашен в 4 цвета. Докажите, что в нём найдутся 2 одноцветные точки на единичном расстоянии.
20. а) **Лемма Шпернера.** Треугольник, вершины ABC которого раскрашены в цвета 1, 2, 3 соответственно, разбит на треугольники. Вершины этих треугольников раскрашены в цвета 1, 2, 3 так, чтобы точки, лежащие на $[AB]$, были раскрашены в цвета 1, 2; на $[BC]$ — 2, 3; $[CA]$ — 3, 1. Тогда найдётся треугольник, вершины которого раскрашены в разные цвета.
- б) Сформулируйте и докажите это утверждение для n -мерного пространства.
21. а) Докажите, что не существует непрерывного отображения диска на свою границу, тождественного на этой границе (т. е. любая точка границы переходит сама в себя). Такие отображения называются *ретрактами*.
- б) Докажите **теорему Брауэра о неподвижной точке**: Непрерывное отображение диска в себя имеет неподвижную точку.
- в) Сформулируйте и докажите n -мерные аналоги этих фактов.
22. **Индуктивное определение размерности.** 0-мерное множество: если все его точки лежат в разных компонентах связности. 1-мерное: не 0-мерное, любые 2 точки которого разделяются 0-мерным множеством, и т.д. Докажите, что \mathbb{R}^n согласно этому определению n -мерно.