Замощения, раскраски и плиточные группы

Решения цикла E

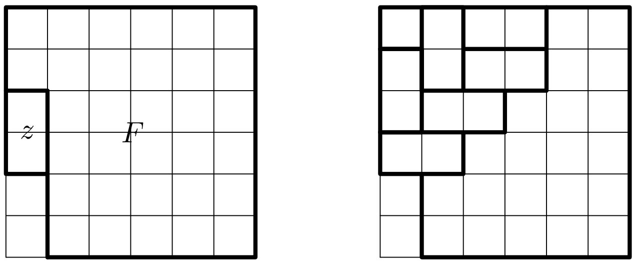

Рисунок 1.

Указание к решению E1b. Доказательство проводится по индукции. Пусть вертикальная сторона прямоугольника чётной длины. Докажем по индукции, что можно поставить все плитки домино вертикально для фигуры F на рис. 1 слева. Нам надо получить с помощью цепочки флипов плитку z. Пусть её нет и нельзя получить цепочкой флипов. Тогда имеем структуру на рис. 1 справа. Отсюда мы можем применить индукционное предположение для F без z.

Указание к решению E2b. Аналогично E1b.

Указание к решению E3. Нарисуйте куб $n \times n \times n$ в виде кирпичной кладки. Что происходит с картинкой, если убирать кирпичи по одному?

Указание к решению E4. Рассмотрите функцию $h(x)$, задаваемую следующим образом: для каждой клетки x, у которой есть ненаправленное ребро, $h(x) = 0$. Будем определять h индуктивно: если для x определена $h(x)$, а y — соседняя с x клетка по стороне, то $h(y)$ равна 0, если у клетки y есть ненаправленное ребро; 1, если при движении из x в y мы пересекаем направленное ребро, идущее слева направо относительно направления движения; -1, если при движении из x в y мы пересекаем направленное ребро, идущее справа налево относительно направления движения. Считайте известным, что эта функция определена корректно. Пусть расстановка стрелок A мажорирует расстановку стрелок B, если для любого x $h_A(x) \geqslant h_B(x)$. Рассмотрим расстановку C такую, что если один флип переводит её в расстановку D, то C не мажорирует D. Т.к. расстановок конечное число, такая C существует. Несложно доказать, что не существует такой точки x на C, что для всех точек y, соседних с ней по стороне, $h(x) \geqslant h(y)$. Тогда C определяется единственным образом. Значит, любую расстановку с помощью цепочки флипов можно перевести в любую другую.

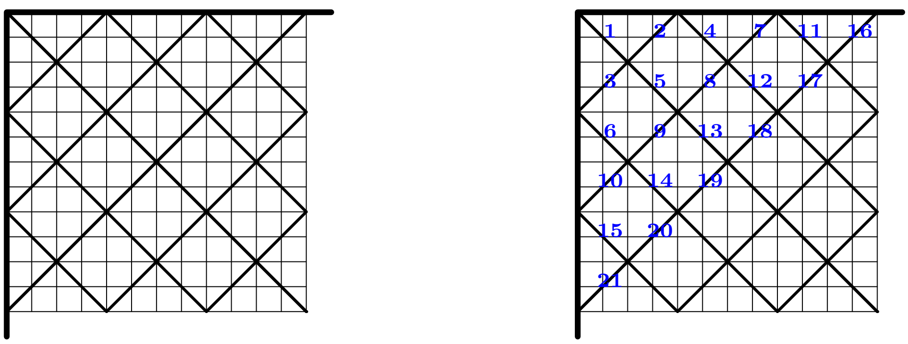

Рисунок 2.

Указание к решению E5. Пронумеруем диагонали как показано на рис. 2 справа. Пусть для всех диагоналей с номерами от 1 до n утверждение доказано. Пусть для диагонали с $(n+1)$-ым номером утверждение не верно. Перебором всех возможных случаев расположения Т-тетрамино, пересекающих $(n+1)$-ую диагональ, получаем противоречие. Как следствие доказательства получаем, что m и n делятся на 4.

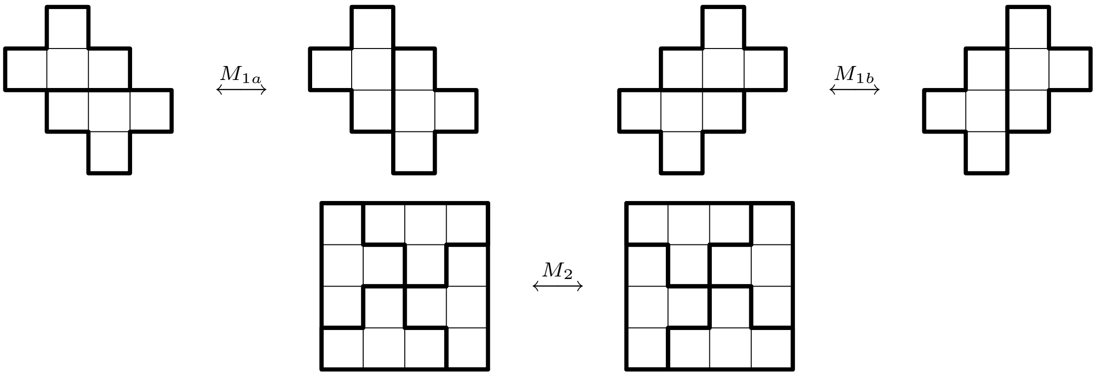

Рисунок 3.

Указание к решению E6. Рассмотрим диагональную сетку из $E5$. Из каждой диагонали направим ребро в сторону, где лежит бóльшая часть тетрамино, содержащего эту сторону. Флипы M_{1a}, M_{1b} переводят любую расстановку Т-тетрамино A в B, если A и B соответствуют одинаковые расстановки стрелок. Для полученной сетки из направленных рёбер применим $E4$. M_2 и есть флип из задачи $E4$.

Ответ к E7: 2^{n-1}.

Ответ к E10a: $(m+1)$-ый член последовательности Фибоначчи $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

Решения цикла F

Решение F1. Рассмотрим последовательность из двадцати четырех ребер a и двадцати четырех b. По условию, мы можем переставить три последних a и три первых b. Продолжая такие перестановки, мы добиваемся требуемого.

F2 и F3 являются подготовительными пунктами для F4 и F5. Мы представим указания к решению для F4 и F5.

Решение F4 и F5. Для решения задач F4 и F5 сначала представим эти задачи для квадратной решетки. Соответствующие фигуры представлены на рисунке. Область T_n при этом будет выглядеть как лестница (см. рисунок). Запишем слова для получившихся плиток. Итак, наша цель выяснить вопрос, принадлежат ли слова, соответствующие областям, в соответствующим плиточным группам (для L_3 и T_2).

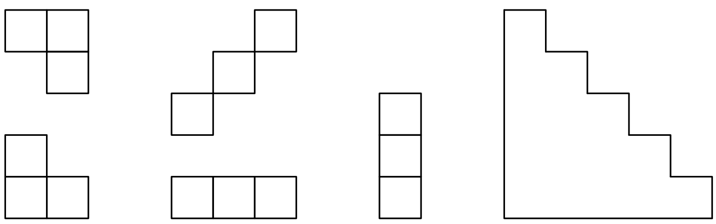
Рисунок 4.

Для этого мы воспользуемся новой идеей, предложенной Конвеем. Рассмотрим бесконечный ориентированный граф, в каждую вершину которого входит одно ребро A и одно B, и выходит также одно ребро A и одно B (см. рисунок). Непосредственно можно проверить, что словам для всех возможных положений L_3 и T_2 соответствуют замкнутые пути.

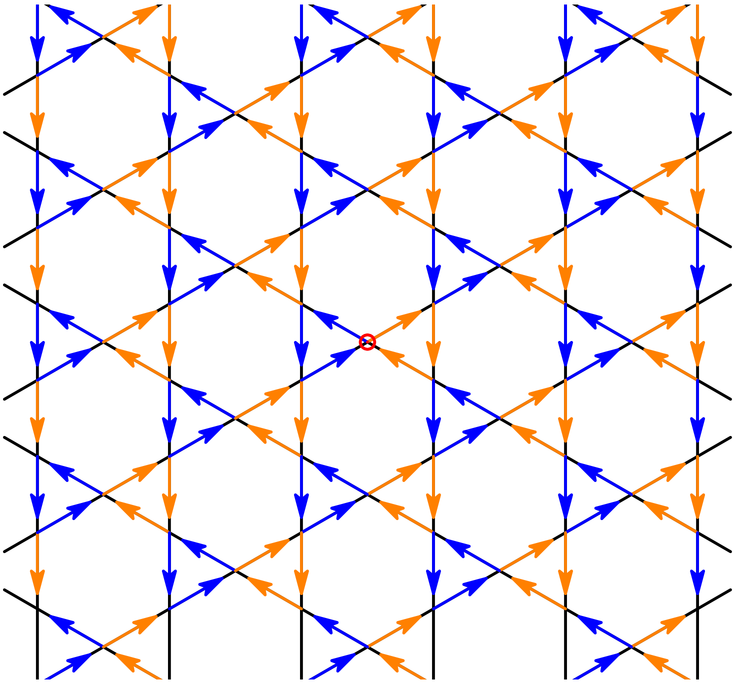

Рисунок 5.

Вычислим для путей, соответствующих положениям L_3 следующий инвариант: количество треугольных клеток, пройденных по часовой стрелке минус количество треугольных клеток, пройденных против часовой стрелки. Заметим, что это число складывается для произведений двух путей, а для L_3-путей оно равно нулю. Кроме того, инвариант не меняется при сопряжении. Значит, для всех слов из плиточной группы для L_3 этот инвариант равен нулю. В плитке T_n количество клеток должно делиться на три, в этом случае $n \equiv 0$ или $2 \pmod 3$. В этих случаях путям на графе для T_n будут соответствовать ненулевые значения инварианта. Значит, соответствующие слова не могут лежать в плиточной группе для L_3 и разбиение, указанное в задаче F4 невозможно.

Для F5 будем использовать другой инвариант: количество количество шестиугольных клеток, пройденных по часовой стрелке минус количество треугольных клеток, пройденных против часовой стрелки. Этот инвариант для различных положений T_2 (уже на квадратной решетки) будет давать значения 1 или -1. Также можно установить, что для слова T_n инвариант будет равен $\left[\frac{n+1}{3}\right]$. Допустим, что T_n разбивается на m плиток T_2. тогда $\left[\frac{n+1}{3}\right] = m \pmod 2$. Кроме того, так как в T_n ровно $n(n+1)/2$ клеток, получаем, что $m = n(n+1)/2 \pmod 2$. Следовательно, $\left[\frac{n+1}{3}\right] = \frac{(n+1)n}{2} \pmod 2$. Легко видеть, что данное соотношение не выполнено для $n \equiv 3, 5, 6$ или $9 \pmod{12}$. Учитывая, что $n \equiv 0$ или $2 \pmod 3$, осталось рассмотреть случаи $n \equiv 0, 2, 9$ или $11 \pmod{12}$. Для этих случаев T_n можно разбить на T_2. Построение этих разбиений оставляем читателю. Таким образом, разбиение, указанное в задаче F5 возможно только для $n \equiv 0, 2, 9$ или $11 \pmod{12}$.