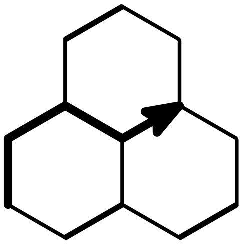


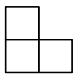
Замощения, раскраски и плиточные группы

А.Я.Белов-Канель, И.Иванов-Погодаев, А.Малистов, И.Митрофанов, М.Харитонов

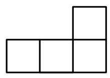
Задачи замощения очень часто становятся в центре различных сюжетов в математике. Очень часто такие задачи решаются с помощью раскрасок. Одной из целей настоящего проекта является изучение более мощного метода, связанного с применением понятий теории групп. Попутно мы изучим, чем по сути, является раскраска в новых терминах, а также рассмотрим вопросы, как замощения могут быть полезны в самой теории групп.

Первый цикл является предварительным, это несколько задач на замощение. Второй и третий циклы являются подготовительными, тут мы разрабатываем необходимую технику нового метода. Во втором вводятся некоторые полезные понятия и изучается связь слов и путей на графах. В третьем мы вводим основные понятия теории групп. В четвертом цикле мы применяем новую технику к плиточным замощениям.

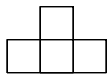
Цикл A. Замощения и раскраски



Уголки из 3 клеток



L-тетрамино



T-тетрамино

♦ **A1.** *При каких M и N прямоугольник $M\times N$ можно разбить на уголки из трех клеток?*

♦ **A2.** *При каких M, N и P прямоугольник $M\times N$ можно разбить на прямоугольники $P\times 1$?*

♦ **A3.** *При каких M, N и P прямоугольник $M\times N$ с одной добавленной клеткой можно разбить на прямоугольники $P\times 1$?*

♦ **A4.** *При каких M, N, A, B прямоугольник $M\times N$ можно разбить на прямоугольники $A\times B$?*

♦ **A5.** *При каких M и N прямоугольник $M\times N$ можно разбить на L-тетрамино?*

Следующая задача не решается с помощью методов раскраски, для ее решения нужно разработать более глубокие методы. Этим мы займемся в циклах B, C, D.

♦ **A6**.** *Докажите, что если прямоугольник $M\times N$ можно замостить с помощью T-тетрамино, то M и N делятся на 4 .*

Цикл B. Подготовительный материал: слова, графы и пути

Пусть есть некоторый конечный алфавит A: множество букв $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, **. . .** Из букв алфавита можно составлять слова — конечные последовательности букв, например, $\boldsymbol{abbc}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{cabcabccbb}$ и т.п. Будем называть *произведением* слов A и B слово, получающееся приписыванием слова B справа к слову A. Таким образом, алфавит задает множество слов, с определенной на нем операцией произведения.

N-ой степенью слова X называется слово, получающееся выписыванием слова X N раз подряд.

♦ **B1.** *Докажите, что если произведение слов U и V совпадает с произведением слов V и U, то и U, и V представляются в виде степеней какого-то слова A.*

Полугруппой будем называть множество элементов с заданной на нем операцией произведения $*$ (результатом применения операции для двух элементов является элемент из того же множества) и выполненным для любых элементов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ свойством $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c}$. Это свойство называется свойством ассоциативности.

Примеры. Множество натуральных чисел образует полугруппу, относительно сложения. Множество рациональных чисел образует полугруппу относительно умножения, а относительно деления — нет, так как на ноль делить нельзя.

Задаваемое алфавитом множество слов является полугруппой относительно операции приписывания одного слова к другому. (Ассоциативность, очевидно, соблюдается.) Более точно, такое множество называется *свободной* полугруппой.

♦ **B2.** *Петя и Вася составляют различные слова используя буквы* $\boldsymbol{a, b, c, d, e, f}$. *В любом слове можно вычеркнуть любую из трех пар рядом стоящих букв (в любом порядке):* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$. *Также можно вставить любую из этих пар букв в любом месте слова. Например, слово* ***dacdbeaaf*** *можно преобразовать следующим образом:* ***dacdbeaaf*** $\rightarrow$ ***dabeaaf*** $\rightarrow$ ***deaaf*** $\rightarrow$ ***dfeeaaf***. *Докажите, что каждое слово можно такими операциями привести к виду, содержащему минимальное число букв, и этот вид не зависит от того, какие операции и в каком порядке применялись.*

Рассмотрим произвольное полимино. Расставим стрелки по его контуру, чтобы получился обход по часовой стрелке или против часовой стрелки. Сопоставим каждому полимино слово (последовательность букв), так чтобы стрелкам «вверх», «вниз», «вправо», «влево» отвечали буквы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{L}$ соответственно. При этом последовательность букв в слове должна соответствовать последовательности стрелок на контуре. Таким образом, каждому полимино будет соответствовать несколько слов, получающихся друг из друга с точностью до циклического сдвига.

RRULULDD *LULDDRRU*

Рисунок 1.

♦ **B3.** *Опишите множества слов, соответствующие домино из двух клеток и тримино-уголку из трех клеток и различным положениям этих плиток на клеточной плоскости.*

♦ **B4.** *Пусть* $\boldsymbol{M}$ *— множество слов, соответствующее различным положениям домино из двух клеток. Пусть с каждым словом из* $\boldsymbol{M}$ *можно проводить следующие операции:*

1. вставить или убрать рядом стоящие пары $\boldsymbol{R}$ *и* $\boldsymbol{L}$ *или* $\boldsymbol{U}$ *и* $\boldsymbol{D}$ *(как в задаче B2);*

2. приписать в начало слова букву $\boldsymbol{R}$, *а в конец — букву* $\boldsymbol{L}$, *или наоборот;*

3. приписать в начало слова букву $\boldsymbol{U}$, *а в конец — букву* $\boldsymbol{D}$, *или наоборот;*

4. приписывать друг к другу слова, получающиеся при таких преобразованиях.

Докажите, что тогда контур фигуры, разбиваемой на домино, можно получить при помощи этих преобразований.

Можно заметить, что: операция **1** соответствует добавлению или удалению пары путей «туда-обратно», операции **2** и **3** соответствуют возможности заменить слово на его циклический сдвиг, а операция **4** соответствует прикладыванию полимино друг к другу (с учетом того, что можно убрать куски путей «туда-обратно»). Это позволяет сформулировать необходимое условие замощения в терминах произведений слов.

♦ **B5.** *Пусть возможно замощение заданной конечной области набором полимино* $\boldsymbol{T}$. *Рассмотрим начальный набор слов, соответствующих набору* $\boldsymbol{T}$. *Докажите, что тогда слово, соответствующее контуру области, представляется как результат применения к этому начальному набору нескольких операций произведения и замены слова на его циклический сдвиг.*

♦ **B6.** *Приведите пример, когда слово контура получается в результате проведения операций из* $\boldsymbol{B5}$, *но замощение невозможно.*

Пусть теперь на плоскости есть многоугольник, разбитый на N маленьких многоугольников так, что никакая вершина многоугольника разбиения не лежит внутри стороны другого многоугольника. Рассмотрим замкнутые пути, произвольной длины, проходящие по сторонам маленьких многоугольников. Будем считать, что от добавления ребра «туда-обратно» путь не меняется. Выберем какую-нибудь вершину разбиения (вершину одного из многоугольников) — точку $\boldsymbol{A}$. Произведением двух путей будем считать новый путь, получающийся, если сначала пройти первый «сомножитель», а потом второй.

♦ **B7.** *Рассмотрим бесконечное множество замкнутых путей начинающихся и заканчивающихся в точке $\boldsymbol{A}$. Докажите, что есть конечный набор $\boldsymbol{P}$ замкнутых путей, начинающихся и заканчивающихся в точке $\boldsymbol{A}$ и таких, что любой замкнутый путь, проходящий через $\boldsymbol{A}$ представим в виде произведения конечного числа путей из $\boldsymbol{P}$. Найдите минимальное число путей в таком наборе $\boldsymbol{P}$.*

♦ **B8.** *Выберем другую вершину $\boldsymbol{B}$, рассмотрим замкнутые пути, начинающиеся и заканчивающиеся в $\boldsymbol{B}$. Докажите, что можно установить соответствие, такое что:*

1. Каждому пути через $\boldsymbol{A}$ будет соответствовать свой путь через $\boldsymbol{B}$ и наоборот;

2. Произведению двух путей из $\boldsymbol{A}$ будет соответствовать путь, являющийся произведением соответствующих этим сомножителям путей из $\boldsymbol{B}$.

Цикл C. Группы

Группой будем называть множество элементов с заданной на нем операцией произведения $*$, удовлетворяющей следующим свойствам:

1. **Ассоциативность.** Для всех $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ выполнено $\boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c}$.
2. **Существование единицы.** Существует элемент $\boldsymbol{e}$ такой, что $\boldsymbol{ae} = \boldsymbol{ea} = \boldsymbol{a}$ выполнено для всех $\boldsymbol{a}$.
3. **Существование обратного элемента.** Для любого $\boldsymbol{a}$ существует элемент $\boldsymbol{a}^{-1}$, такой что $\boldsymbol{aa}^{-1} = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$.

Примеры. Множество целых чисел образует группу относительно сложения, обратным элементом является противоположный по знаку. Множество рациональных чисел (но без нуля) образует группу относительно умножения.

Группа подстановок. Три элемента можно расположить друг за другом шестью различными способами: 213, 321, 132, 312, 231, 123. Фактически, речь идет о преобразованиях трех элементов: можно поменять местами два из них (получится 213, 321 или 132), а можно сместить все три по циклу (получится 312 или 231). Можно также ничего не делать, тогда останется 123. То есть, у нас получается как бы шесть различных «действий». Если применить сначала одно такое действие, а потом — другое, результатом опять будет какое-то действие из этих шести. Например, если сначала поменять местами первые два элемента, а потом сместить все по кругу вправо на одну позицию, то получится $123 \to 213 \to 321$. То есть, все равно, что поменять местами первый и третий элементы. Эти «действия» называются *подстановками.* Они образуют группу относительно операции последовательного применения. В этой группе шесть элементов, единицей является тождественное преобразование 123. Это минимальная группа, где есть элементы a и b, такие что $ab \neq ba$. Можно рассматривать группы подстановок S_n для разных натуральных n.

♦ **C0.** *Проверьте, что пути из задач B8 и B9 образуют группу.*

Группа называется *абелевой* или *коммутативной* если для любых элементов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ выполнено $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

♦ **C1.** *Постройте некоммутативную группу из* $\boldsymbol{8}$ *элементов.*

♦ **C2.** *Докажите, что множество движений в пространстве, переводящих куб в себя, образует группу. Найдите число ее элементов.*

♦ **C3.** *Докажите, что множество слов в алфавите $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}^{-1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_2}^{-1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a_n}^{-1}\}$ Образует группу относительно операции приписывания (с сокращением рядом стоящих обратных букв $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^{-1}$).*

Пусть $\boldsymbol{G}$ — группа. *Подгруппой* называется подмножество $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{G}$ элементов группы, такое, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ лежат в $\boldsymbol{H}$, то $\boldsymbol{a}^{-1}$, $\boldsymbol{b}^{-1}$, $\boldsymbol{ba}$ и $\boldsymbol{ab}$ тоже лежат в $\boldsymbol{H}$. Подгруппа сама по себе тоже является группой, с той же операцией.

♦ **C4.** *Докажите, что каждый элемент в группе подстановок $\boldsymbol{S_n}$ есть произведение нескольких независимых циклов. Опишите все подгруппы группы подстановок из пяти элементов.*

Элементы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *сопряженными*, если существует такой элемент $\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{xax^{-1} = b}$. Если $\boldsymbol{H}$ — подгруппа некоторой группы $\boldsymbol{G}$, то сопряженное множество $\boldsymbol{xHx^{-1}}$ также образует подгруппу $\boldsymbol{G}$, так как $\boldsymbol{xh_1x^{-1}xh_2x^{-1} = xh_1h_2x^{-1}}$.

♦ **C5.** *Найдите все сопряженные подгруппы в группе подстановок из пяти элементов.*

Часто одна и та же группа может быть описана различными способами. Например, элементами группы могут быть движения, переводящие многогранник в себя или подстановки из нескольких элементов, при этом само устройство группы будет одинаковым. Для описания «одинаковости» существует специальное понятие.

Группы $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{H}$ называются *изоморфными*, если между их элементами можно провести соответствие, обладающее следующими свойствами:

1. Для каждого элемента из $\boldsymbol{G}$ существует единственный соответствующий ему элемент из $\boldsymbol{H}$, и наоборот.

2. Если $\boldsymbol{g_1, g_2} \in \boldsymbol{G}$ соответствуют $\boldsymbol{h_1, h_2} \in \boldsymbol{H}$, то $\boldsymbol{g_1g_2}$ соответствует $\boldsymbol{h_1h_2}$.

♦ **C6.** *Найдите группу подстановок, изоморфную группе движений, сохраняющих куб.*

Пусть элементы некоторой группы раскрашены в несколько цветов так, что цвет произведения двух элементов зависит только от цветов сомножителей и не зависит от выбора элемента внутри цвета. То есть произведение элементов с цветами 1 и 2 всегда имеет один и тот же цвет, независимо от того, какие элементы с цветами 1 и 2 берутся.

♦ **C7.** *Докажите, что множество элементов с цветом, как у единицы, образует подгруппу. Такая подгруппа называется нормальной.*

Эквивалентное определение. Подгруппа $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{G}$ называется *нормальной*, если для любого элемента $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}$ (не обязательно принадлежащего $\boldsymbol{H}$) выполнено $\boldsymbol{gHg^{-1}} \in \boldsymbol{H}$. То есть, нормальная подгруппа сопряжена сама себе.

♦ **C8.** *Докажите эквивалентность определений.*

♦ **C9.** *Найдите все нормальные подгруппы в группе подстановок* $\boldsymbol{S_4}$.

♦ **C10.** *Рассмотрим некоторую группу* $\boldsymbol{G}$. *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *множество элементов вида* $\boldsymbol{aba^{-1}b^{-1}}$ *(они называются коммутаторы). Пусть* $\boldsymbol{H}$ *— это всевозможные произведения элементов из* $\boldsymbol{K}$. *Докажите, что* $\boldsymbol{H}$ *является нормальной подгруппой.*

Цикл D. Плиточные группы

Множество клеток на квадратной решетке будем называть *связным*, если из любой его клетки в любую другую можно попасть, переходя из клетки в клетку по стороне.

Пусть $\boldsymbol{T}$ — множество клеток на квадратной решетке, дополнение к которому связно. Если периметр $\boldsymbol{T}$ можно обойти, не проходя по одному ребру дважды, будем называть $\boldsymbol{T}$ *плиткой*. Теперь мы будем рассматривать замощения с помощью плиток.

Рассмотрим множество слов, соответствующих конечному набору плиток. Пусть с этим множеством можно играть в игру, как в задаче B4, то есть брать слово, приписывать в любом месте взаимообратные буквы, заменять слово на его сопряженное, а также приписывать рядом уже получившиеся слова (то есть брать произведения слов).

♦ **D1.** *Докажите, что полученные описанным образом слова образуют группу.*

Будем называть эту группу *плиточной группой* данного набора.

♦ **D2.** *Пусть* $\boldsymbol{C}$ *— множество замкнутых путей на квадратной решетке. Докажите, что множество соответствующих этим путям слов образует группу. Также докажите, что для любого набора плиточная группа является нормальной подгруппой в группе* $\boldsymbol{C}$.

♦ **D3.** *Докажите, что если область* $\boldsymbol{O}$ *замощается набором* $\boldsymbol{T}$, *то слово* $\boldsymbol{dO}$, *соответствующее периметру* $\boldsymbol{O}$, *лежит в плиточной группе* $\boldsymbol{T}$.