Кубик Рубика с высшей точки зрения.

9 августа 2008 г.

Мы поместили Квантовскую статью и книгу, посвященную Кубику в раздаточные материалы. В статье содержится решение п.а), а в книге – серии а, б) и необходимую теоретико групповую технику.

Мы не исключаем, что часть пунктов перейдет в заочный конкурс, поэтому здесь мы постараемся прежде всего показать логику исследования, каким образом общий подход позволяет разобраться в ситуации, как математик, не имея дела с кубиком может создать общую теорию.

Допустим, мы ничего не знаем про кубик и нам надо разобраться в общей ситуации. Что значит общая ситуация? Это

– кубик $n \times n \times n$

– многомерный куб.

– прочие головоломки.

Нелепо сразу пытаться разобраться в общей ситуации. Нужно

– сперва разобрать классический кубик

– кубик $4 \times 4 \times 4$

– кубик $5 \times 5 \times 5$

– кубик $n \times n \times n$

Рассмотрим k-мерный куб $n \times \cdots \times n$. Он разбит на n^k кубиков. Разрешается взять один слой из n^{k-1} кубика, представляющий собой $(k-1)$-мерный куб и повернуть его как единое целое внутри слоя так чтобы он совместился. (Так, в случае обычного трехмерного куба действие заключается в повороте слоя.)

Каждая грань такого куба раскрашена в свой цвет. Вопрос заключается в возможности сборки. Если $n = 2$, то такой куб называется *дамским.* Ключевое значение имеет

– многомерный дамский куб.

Поскольку группа движений n-мерного кубика, переводящих фиксированную вершину в себя есть A_n, группа самосовмещений углового кубика есть A_n. Поэтому дамский куб ведет себя по-разному в размерностях 3, 4,(когда эта группа разрешима) и в размерности 5 (когда она проста и некоммутативна). Высшие размерности должны себя вести как пятимерье.

– общий случай.

С чего начать при изучении классического кубика?

С очевидных, но полезных наблюдений.

1) Центральные и угловые кубики не смешиваются.

2) Можно временно забыть об ориентации – от ориентаций не зависят перестановки кубиков.

3) Центральные кубики неподвижны.

4) Интересно взаимодействие соседних граней.

Отсюда — программа исследований.

1. Изучить *почти сборку* **кубика**.

(Мы говорим, что куб *почти собран*, если все кубики стоят на своих местах, но возможен непорядок с ориентацией.)

2. Изучить ориентации.

Чтобы осуществить (1) нужно

а) Изучить почти сборку углов.

б) Изучить почти сборку ребер.

в) Изучить взаимодействие а) и б), лучше всего – научиться расщеплять а) и б).

Но прежде всего надо рассмотреть ключевую ситуацию – *взаимодействие поворотов двух соседних граней.* Это составляет содержание задачи

E1 а) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с одной общей вершиной. Докажите, что они порождают всю группу S_7.

b) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с парой общих соседних вершин. Докажите, что они порождают всю группу S_6.

Теперь интуитивно ясно, как можно почти собрать дамский куб почти собирается в любой размерности. Ясно также, что что множества реберных и угловых кубиков кубика $3 \times 3 \times 3$ почти собирается, правда по-отдельности. Более того, видно, как установить что множество реберных кубиков каждого сорта кубика $n \times n \times n$ почти собирается, правда – по отдельности. Ясно также, что аналогичное утверждение для многомерного кубика доказывается.

Теперь нам надо понять, как почти собирать кубики разных сортов вместе. Отсюда – такие задачи.

E3 а) Покажите, что группа A_{12} порождается 11-членными циклами.

б) Пусть s – 11-членный цикл. Тогда $s = s'^{8!}$ для некоторого 11-членного цикла s'. Пусть $x \in S_8$. Тогда $x^{8!}$ есть единичная перестановка.

в) Если переставить реберные и угловые кубики перестановками одинаковой четности, то такая перестановка почти собирается.

г) Докажите, что любая расстановка в кубике $4 \times 4 \times 4$ почти собирается.

Приведенное решение все же использует специфику чисел 8 и 12 – а именно то, что между ними есть простое число. Основное наблюдение надо обобщить.

Отсюда возникает следующая задача

Пусть G_1 есть простая конечная группа с образующими $a_1, \dots, a_k$, G_2 есть простая конечная группа с образующими $b_1, \dots, b_k$, $G = G_1 \oplus G_2$, H есть подгруппа в G порожденная элементами $z_i = (a_i, b_i), i = 1, \dots, k$.

Доказать, что либо $H = G$, либо для некоторого изоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ выполняется равенство $b_i = \varphi(a_i)$.

Хочется уметь расщеплять несколько объектов одновременно. Тогда мы приходим к следующему утверждению:

Пусть G_1 есть простая конечная группа с образующими $a_1, \dots, a_k$, G_2 есть простая конечная группа с образующими $b_1, \dots, b_k$, G_3 есть простая конечная группа с образующими $c_1, \dots, c_k$, $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$, H есть подгруппа в G порожденная элементами $z_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1, \dots, k$.

Тогда либо $H = G$, либо для некоторого изоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ выполняется равенство $b_i = \varphi(a_i)$ и при этом $H = H_{12} \oplus G_3$, где $H_{12} = \{(x, \varphi(x))\}$ есть подгруппа в $G_1 \oplus G_2$, либо аналогично $H = H_{23} \oplus G_1$ либо аналогично $H = H_{31} \oplus G_2$, либо для некоторых изоморфизмов $\varphi : G_1 \to G_2$ и $\psi : G_1 \to G_3$ выполняются равенства $b_i = \varphi(a_i)$ $c_i = \psi(a_i)$.

Можно сформулировать аналогичное утверждение для прямых сумм от произвольного числа элементов.

Теперь можно разобраться с почти сборкой. При этом лучше начать с изучения полной системы инвариантов для почти-сборки куба $5 \times 5 \times 5$, перейти к кубу $n \times n \times n$, а затем изучить многомерье.

Теперь займемся **ориентацией**. Все реберные инварианты нам известны. Однако из решения не совсем ясно, как их можно придумать. Поэтому полезно получить общее объяснение, позволяющее понять и общую ситуацию (пусть даже неоправданно длинное если иметь в виду только кубик Рубика).

Хулиган Вася может взять реберный кубик (стоящий на некотором месте) и, перевернув его, поставить на исходное место. Из данной расстановки Васиными действиями можно получить 2^{12} степени различных расстановок. e_i означает Васино действие с i-м ребром. Тогда результат Васиной деятельности определяется множеством $I \subset \{1, \dots, 12\}$ таким, что произошло переключение на ребрах с номерами $i \in I$. Иногда результат Васиных действий можно обозначить в виде $f = \sum_{i \in I} e_i$. Легко видеть, что результаты складываются по модулю 2. Действие называется *честным*, если его можно осуществить только вращая кубик.

В следующие утверждения и рассуждения совершенно стандартны с точки зрения линейной алгебры и теории инвариантов.

Пусть u, v – честные действия, тогда $u+v$ тоже честное действие. Если $\sum_{i \in I} e_i$ – честное действие, $\sigma \in S_{12}$, то $\sum_{i \in I} e_{\sigma(i)}$ также является честным действием.

Пространством называется группа, порожденная множеством действий. Множество честных действий называется *честным пространством*. Пусть L – пространство. Назовем L *инвариантным*, если для любого $\sigma \in S_n$ и $\sum_{i \in I} e_i \in L$ величина $\sum_{i \in I} e_{\sigma(i)}$ снова попадает в L. Мы установили, что пространство честных действий есть инвариантное пространство.

Пусть L есть инвариантное пространство. Тогда имеет место одна из следующих возможностей.

1) $L = 0$

2) L совпадает со всем пространством.

3) L порождено элементами $e_i + e_j$.

4) $L = \{0, \sum i = 1^{12} e_i$.

Это утверждение проясняет природу реберного инварианта в кубике Рубика, и показывает, как к ним можно прийти. Вторая возможность для честного пространства исключается проверкой справедливости инварианта, а первая и четвертая – указанием способа осуществить разворот. Несложно сформулировать и доказать аналог утверждения F8 для вращения угловых кубиков. Кроме того, несложно показать, что реберные и угловые действия разделяются, даже если учитывать ориентацию.

Этих идей достаточно чтобы найти полную систему инвариантов для кубика $n \times n \times n$ а также полную систему инвариантов для додекаэдра и икосаэдра Рубика произвольного размера.

Чтобы провести исследование в многомерье, надо рассмотреть ключевой случай дамского куба. (Ladies Cube).

Прежде всего, необходимо изучить группы вращений. Отсюда – вспомогательные утверждения.

а) Пусть K – куб в n-мерном пространстве, G – группа, порожденная его поворотами. Тогда $G \simeq S_n$.

b) Пусть K – куб в n-мерном пространстве, B – его вершина, H – группа, порожденная его поворотами, переводящими вершину B в себя. Тогда $H \simeq A_n$.

Изучим четырехмерный дамский куб. Известно, что $A_4/K_4 = A_3$. Выберем две пары ребер, выходящих из вершины B (это можно сделать 3 разными способами). На этих способах действует группа $A_4/K_4 = A_3$.

Таким образом находится нетривиальный инвариант для четырехмерного дамского куба. Неожиданным образом он оказывается по модулю 3!

Чтобы получить этот инвариант достаточно покрасить пары двумерных граней, выходящих из вершин кубика плоскости которых пересекаются по точке (XOY, ZOT), и рассуждать так же как и для трехмерного куба.

Можно показать (это будет следовать из дальнейших рассмотрений) что других инвариантов нет.

Как разворот части (некоторых, но не всех!!) угловых кубиков дамского $n > 3$ мерного куба, при котором каждый кубик будет оставаться на своем месте?

Это очень просто – надо действовать так, чтобы кубики, у которых первые три координаты совпадают, вращались как единое целое. Это рассуждение работает для любой размерности.

Изучим возможные развороты кубика.

Пусть G – простая некоммутативная конечная группа. $R = G \oplus G \oplus \cdots \oplus G$. Назовем подгруппу H группы G удобной, если ее проекция покрывает каждое слагаемое. Назовем группу элементарной, если она имеет вид $(h, \varphi_1(h), \ldots, \varphi_l(h))$, $h \in G$, φ_i – изоморфизмы G на себя.

Тогда удобная группа есть прямая сумма элементарных.

Из этого утверждения выводится, что у пятимерного дамского кубика нет инвариантов, т.е. количество его допустимых состояний равно $2^5! \cdot 60^3 2$.

Аналогично обстоит дело в пространстве бóльшей размерности.

Чтобы изучить ситуацию в четырехмерном пространстве, надо изучить поведение групп S_3 и A_4.

Пусть $G = S_3$. $R = G \oplus G \oplus \cdots \oplus G$. Назовем подгруппу H группы G удобной, если ее проекция покрывает каждое слагаемое. Назовем группу элементарной, если она имеет вид $(h, \varphi_1(h), \ldots, \varphi_l(h))$, $h \in G$, φ_i – изоморфизмы G на себя.

Тогда удобная группа есть прямая сумма элементарных, либо она содержит $A_3 \oplus A_3 \oplus \cdots \oplus A_3$.

Пусть $G = A_4$. $R = G \oplus G \oplus \cdots \oplus G$. Назовем подгруппу H группы G удобной, если ее проекция покрывает каждое слагаемое. Назовем группу элементарной, если она имеет вид $(h, \varphi_1(h), \ldots, \varphi_l(h))$, $h \in G$, φ_i –

изоморфизмы G на себя.

Тогда удобная группа есть прямая сумма элементарных, либо она содержит $K_4 \oplus K_4 \oplus \cdots \oplus K_4$.

Для завершения исследования в кубе произвольного размера и произвольной размерности надо выбрать такую систему координат, чтобы координаты центра куба были нулями, а координаты центров кубиков по модулю не превосходили n. Каждый сорт определяется набором M_k координат, по модулю равных k для всех k. Группа разворотов для каждого сорта суть $\bigoplus_k S_{|M_k|}$ если $|M_0| \neq 0$ и $\bigoplus_k A_{|M_k|}$ если $|M_0| = 0$.

Приведенных выше соображений достаточно для нахождения полной системы инвариантов. С группами S_i связаны только инварианты по модулю 2, с группами A_3 и A_4 – только инварианты по модулю 3, с группами A_n при $n \geq 5$ – вообще никакие инварианты не связаны.

Следующая задача завершает исследование.

F1

а) Пусть координаты центра четырехмерного куба $3 \times \cdots \times 3$ суть $(0,0,0,0)$, а координаты центров кубиков – $0, \pm 1$. Покажите, что инварианты разворота, связанные с кубиками с координатами центров $(0,\pm 1,\pm 1,\pm 1), (\pm 1, 0, \pm 1, \pm$ связаны только с четностью.

б) Пусть координаты центра пятимерного куба $4 \times \cdots \times 4$ суть $(0,0,0,0,0)$, а координаты центров кубиков – $0, \pm 1, \pm 2$. Покажите, что инварианты разворота, связанные с кубиками с координаты центров которых суть: $(0,\pm 1,\pm 1,\pm 1,\pm 1), (\pm 1,0,\pm 1,\pm 1,\pm 1), (\pm 1,\pm 1,0,\pm 1,\pm 1), (\pm 1,\pm 1,\pm 1,0,\pm 1),$ $(\pm 1,\pm 1,\pm 1,\pm 1,0)$ связаны только с модулем 3.

F2 Какие несмешиваемые типы кубиков есть в k-мерном кубе размера n?

F3 Приведите разные примеры инвариантов для k-мерного куба размера n.

F4* Постройте полную систему инвариантов для k-мерного куба размера n.