ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
(Решения)

Второй этап

F) Пусть функция g удовлетворяет уравнению

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

где точка (x, y) принадлежит некоторому подмножеству Z плоскости R^2. Если её можно продолжить до функции f, удовлетворяющей аналогичному уравнению при всех $x, y \in R^2$, то мы говорим, что f – *аддитивное продолжение* функции g.

13. Покажите, что если Z – единичный квадрат, то любая функция g, удовлетворяющая аддитивному уравнению Коши на Z, допускает единственное аддитивное продолжение на всю плоскость.

Решение. Всякое число x представляется в виде ny, где $n \in N,\ y \in Z$. Положим $g(x) = ng(y)$. Корректность, аддитивность и единственность проверяются.

14. Приведите пример бесконечного множества Z и функции g, которая удовлетворяет уравнению Коши на этом множестве, но не допускает аддитивного продолжения с Z на R^2.

Пример. $Z = \{(x, \{x\})\} \mid x \in R$; $g(x) = \{x\}$, где $\{x\}$ – целая часть числа x.

Полученные результаты нашли применение, например, в следующей экономико-математической модели ([1], с. 95–96).

15. Пусть нужно разделить сумму денег, равную S, между $m > 2$ конкурирующими проектами. Каждый из n экспертов даёт свои рекомендации (j-й эксперт предлагает дать i-му проекту сумму x_{ij}), и в итоге определяется согласованное распределение

$$\phi_i(x_{i1}, \dots, x_{in})\ (i = 1, \dots, m)$$

(для каждого проекта это распределение определяется суммами, которые выделялись экспертами именно на этот проект, причём вид зависимости может быть различным для различных проектов). Пусть выполнены следующие два естественных условия.

(i) Если никто из экспертов не выделяет денег на данный проект, то он ничего не получает в согласованном распределении:

$$\phi_i(0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

(ii) Если каждое из предлагаемых распределений исчерпывает всю сумму S, то и согласованное распределение исчерпывает всю сумму: из $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = S$ $(j = 1, \dots, n)$ следует $\sum\limits_{i=1}^{m} \phi(x_{i1}, \dots, x_{in}) = S$.

Покажите, что при указанных условиях все функции ϕ_i совпадают с некоторой функцией $\sum \omega_j x_i j$, где $\omega_j \geq 0,\ \sum \omega_j = 1$.

Решение. Для краткости будем обозначать $(S, \dots, S)$ через $\mathbf{S}$, а $(x_{i1}, \dots, x_{in})$ через $\mathbf{x_i}$. Заметим, что условие (ii) равносильно

$$\sum_{i=2}^{m} \phi_i(\mathbf{x_i}) + \phi_1(\mathbf{S} - \sum_{i=2}^{m} \mathbf{x_i}) = S.$$

При $\mathbf{x_2} = \ldots = \mathbf{x_n} = \mathbf{0}$ получаем отсюда $\phi_1(\mathbf{S}) = S$ $(i = 1, \ldots, m)$. Если же $\mathbf{x_3} = \ldots = \mathbf{x_m} = \mathbf{0}$, то получаем $\phi_1(\mathbf{S} - \mathbf{x}) = S - \phi_2(\mathbf{x})$ для произвольного $\mathbf{x}$. Положив $\mathbf{x_4} = \ldots = \mathbf{x_m} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x_2} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x_3} = \mathbf{y}$, получаем уравнение Пексидера (для каждой координаты):

$$\phi_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \phi_2(\mathbf{x}) + \phi_3(\mathbf{y}) \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in [0; S]^n).$$

Положим здесь $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тогда $\phi_2(\mathbf{y}) = \phi_3(\mathbf{y})$. Аналогично получаем, что все ϕ_i равны одной и той же функции ϕ. Приходим к уравнению $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})$ для $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in [0; S]^n$. Очевидно, $\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \equiv \phi(\xi_1, 0, \ldots, 0) + \phi(0, \xi_2, 0, \ldots) + \ldots + \phi(0, \ldots, 0, \xi_n) := f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2) + \ldots + f_n(\xi_n)$ (здесь $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – вещественные переменные). Каждая из функций $f_1, \ldots, f_n$ удовлетворяет аддитивному уравнению Коши на $[0; S]$. Значения всех рассматриваемых функций по смыслу задачи неотрицательны, и с учётом результатов задач 13 и 10 получаем, что $\phi(\mathbf{x})$ имеет вид $\phi(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j \xi_j$, где $\omega_j \geq 0$. Поскольку $\phi(\mathbf{S}) = S$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j = 1$. Обратно, функции такого вида удовлетворяют условиям задачи.

G) **16.** Найдите все непрерывные вещественные функции положительной вещественной переменной, удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = a(x) + b(x)c(y).$$

Ответ. 1) $f(x) \equiv a(x) \equiv K$ $\quad (K$ – произвольная константа, $b(x) \equiv 0, c(y)$ – произвольная непрерывная функция.

2) $f(x) \equiv K_1, a(x) \equiv K_1 - b(x)K_2$ $\quad (K_1, K_2$ – произвольные константы), $b(x)$ – произвольная непрерывная функция, $c(y) \equiv K_2$.

3)

$$f(x) = K_1 \ln x + K_2, \quad a(x) = K_1 \ln x + K_2 - K_3 K_4,$$

$$b(x) \equiv K_3, \quad c(y) = \frac{K_1 \ln y}{K_3} + K_4$$

$(K_1, K_2, K_3, K_4$ – произвольные константы, $K_3 \neq 0)$.

4)

$$f(x) = K_1(x^\alpha - 1) + K_2, \quad a(x) = K_1(x^\alpha - 1) + K_2 - K_3 K_4 x^\alpha,$$

$$b(x) = K_3 x^\alpha, \quad c(y) = \frac{K_1(x^\alpha - 1)}{K_3} + K_4$$

$(K_1, K_2, K_3, K_4, \alpha$ — произвольные константы, $K_3 \neq 0$, $\alpha \neq 0)$.

Решение. Положим

$$f_1(x) := f(x) - f(1), \ c_1(y) := c(y) - c(1), \ a_1(x) := a(x) - f(1) + b(x)c(1).$$

Тогда

$$(') \qquad f_1(xy) = a_1(x) + b(x)c_1(y),$$

$$('') \qquad f_1(1) = c_1(1) = 0.$$

Положив $y = 1$, получаем $f_1(x) = a_1(x)$. Если $a_1 \equiv 0$, то b или c_1 – тождественный нуль, и мы получаем классы функций 1 и 2 из ответа к задаче (см. выше). В противном случае положим $x = 1$. Тогда

$$f_1(y) \equiv b(1)c_1(y),$$

откуда $b(1) \neq 0$. Положим

$$b_1(x) := b(x)/b(1).$$

Тогда $f_1(xy) = f_1(x) + b_1(x)f_1(y)$, откуда

$$f_1(xyz) = f_1(xy) + b_1(xy)f_1(z) = f_1(x) + b_1(x)f_1(y) + b_1(xyz)f_1(z),$$

$$f_1(xyz) = f_1(x) + b_1(x)f_1(yz) = f_1(x) + b_1(x)f_1(y) + b_1(x)b_1(y)f_1(z).$$

Сравнив эти равенства и взяв значение z, при котором $f_1(z) \neq 0$, получаем

$$b_1(xy) \equiv b_1(x)b_1(y).$$

Так как $b_1(0) \neq 0$, то согласно результату задачи 9c имеем $b_1(x) = x^\alpha$, где α – произвольная константа. Отсюда $f_1(xy) = f_1(x) + x^\alpha f_1(y)$. Если $a = 0$, то с учётом результата задачи 9a получаем класс функций 3. Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Возьмём произвольные $x, y \neq 1$. Так как $f_1(xy) = f_1(x) + x^\alpha f_1(y)$, $f_1(xy) = f_1(y) + y^\alpha f_1(x)$, то

$$\frac{f_1(x)}{x^\alpha - 1} := \frac{f_1(y)}{y^\alpha - 1}.$$

Так как левая часть не зависит от y, а правая часть от x, то они являются константами, и мы получаем класс функций 4.

Многие школьники знают, что интеграл от степенной функции – степенная функция с коэффициентом (с точностью до аддитивной константы), за единственным исключением, когда вместо степенной функции получается логарифм. В стандартном курсе анализа этот факт доказывается с помощью дифференцирования, причём отдельно для показателя -1 и отдельно для остальных показателей.

17. Опираясь на результаты задач 16, 9a и 9c, найдите интеграл от x^a, где x – положительная вещественная переменная, a – произвольная константа. Дифференцировать нельзя, пока не получите функциональное уравнение!

Решение. Пусть $g(x) = x^a$, $f(x)$ – первообразная от $g(x)$. Можно считать, что $f(1) = 0$. Так как $g(xy) \equiv g(x)g(y)$, то

$$f(xy) = \int_1^{xy} g(t)dt = \int_1^x g(t) + \int_x^{xy} g(t)dt =$$

$$= f(x) + \int_1^y g(tx)d(tx) = f(x) + g(x)x\int_1^y g(t)dt =$$

$$= f(x) + x^{a+1}f(y).$$

Выполнены условия задачи 16, причём $f(x) = a(x) \neq \text{const}$, $b(x) = f(x)$, $c(y) = x^{a+1}$. Если $a = -1$, то мы имеем случай 3 при $K_2 = K_4 = 0$, $K_3 = 1$, т.е. $f(x) = K_1 \ln x$. Если же $a \neq -1$, то получаем случай 4 при $\alpha = a + 1$, $K_2 = K_4 = 0$, $K_3 = 1$, т.е. $f(x) = K_1(x^{a+1} - 1)$.

Н) **18.** Найдите все непрерывные решения **уравнения Даламбера**

$$f(\phi+\psi)+f(\phi-\psi)=2f(\phi)f(\psi)$$

при условии

$$(**) \qquad f(\pi/4)=\sqrt{2}/2.$$

Решение. Положим $\psi=0$: получаем $f(0)=1$. Тогда для некоторого $C>0$ имеем $f(x)>0$ при $x\in[0,C]$. Положим $\psi=\phi=x/2$: получаем

$$(***) \qquad f(x)+1=2f(x/2)^2.$$

Пусть $f(C)<1$. Тогда $f(C)=\cos\alpha$ для некоторого $\alpha\in[0;\pi/2)$. Ввиду $(***)$ имеем $f(C/2)=\cos\alpha/2$ и по индукции $f(C/2^n)=\cos\alpha/2^n$ для всех натуральных n. Из исходного уравнения получаем:

$$f\left(\frac{k+1}{2^n}C\right)=2f\left(\frac{k}{2^n}C\right)f\left(\frac{1}{2^n}C\right)-f\left(\frac{k-1}{2^n}C\right)=$$

$$=2\cos\left(\frac{k}{2^n}\alpha\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)-\cos\left(\frac{k-1}{2^n}\alpha\right)=\cos\left(\frac{k+1}{2^n}\alpha\right).$$

Тогда по непрерывности (свойство (b)) $f(Cx)=\cos\alpha x$ для любого x. Положив $c=\alpha/C$, $Cx=\phi$, имеем $f(x)=\cos c\phi$. Из условия $(**)$ следует, что $c=8k\pm1$.

Пусть теперь $f(C)>1$. Тогда аналогичные рассуждения показывают, что $f(\phi)>1$ при любом ϕ, поэтому условие $(**)$ не выполнено.

Комментарий. При $C>1$ и отсутствии условия $(**)$ уравнение имеет решение $f(x)=\mathrm{ch}(cx)$, где c – произвольная константа, $\mathrm{ch}(x):=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

19. Можете ли вы указать теперь функциональное уравнение:

(a) для синуса?

(b) для тангенса?

Решение. (a)

$$f(\phi+\psi+\frac{\pi}{2})+f(\phi-\psi+\frac{\pi}{2})=2f(\phi+\frac{\pi}{2})f(\psi+\frac{\pi}{2})$$

при условии $(**)$.

(b) $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ при условии, например, $f(\pi/4)=1$.

$*$**20.** Используя результаты задач 8 и 18, покажите, что сложение векторов в трёхмерном евклидовом пространстве — единственная операция над парами таких векторов, которая удовлетворяет следующим условиям:

(i) если оба вектора подвергаются одинаковому вращению, то и результат операции подвергается такому же вращению;

(ii) операция коммутативна и ассоциативна;

(iii) для векторов одинакового направления операция сводится к сложению длин;

(iv) сумма двух векторов равной длины непрерывно зависит от угла между ними.

Рассмотрите два случая:

(а) оба вектора имеют равную длину (скажем, единичную);

*(б) векторы имеют произвольную длину.

Схема решения (см. [1], с. 13–18). Обозначим рассматриваемую операцию через $\circ$, а её результат будем называть *суммой* векторов. Из (iii) следует, что $p \circ 0 = p$ для любого вектора p (0 – нулевой вектор). Применив (i), имеем $-p \circ p = 0$. С учётом (ii) получаем:

(v) относительно операции $\circ$ векторы образуют абелеву группу, в которой 0 является нулём, а $-p$ – противоположный элемент для p.

Из (i) и коммутативности операции $\circ$ следует, что сумма двух векторов одинаковой длины лежит на биссектрисе одного из двух углов между ними. Если направление векторов одинаково, то в силу (iii) это меньший (нулевой) угол. Если для каких-то векторов равной длины это больший угол, то по непрерывности (свойство (iv)) для каких-то векторов не противоположного направления сумма равна 0, но это противоречит (v). Поэтому сумма всегда лежит на биссектрисе меньшего угла между векторами.

Фиксируем теперь угол φ между двумя векторами. Если дана их длина x, то в силу (i) определена и длина их суммы $g(x)$. Длину вектора v обозначим $|v|$. Пусть векторы p_1 и p_2 имеют одинаковое направление, так же как и векторы q_1 и q_2, причём угол между p_1 и q_1 равен φ. Если $|p_1| = |q_1| = x$ и $|p_2| = |q_2| = y$, то согласно (iii) $|p_1 \circ p_2| = |q_1 \circ q_2| = x + y$. При этом $|p_1 \circ q_1| = g(x)$, $|p_2 \circ q_2| = g(y)$. Тогда

$$g(x+y) = |(p_1 \circ p_2) \circ (q_1 \circ q_2)| = |p_1 \circ (p_2 \circ q_1) \circ q_2| =$$
$$= |p_1 \circ (q_1 \circ p_2) \circ q_2| = |(p_1 \circ q_1) \circ (p_2 \circ q_2)| = g(x) + g(y).$$

Мы получили уравнение Коши для неотрицательных x, y, причём его решение неотрицательно. Согласно результату задачи 10 $g(x) \equiv cx$ для некоторого $c \geq 0$. На самом деле $c > 0$, т.к. сумма ненулевых векторов непротивоположного направления отлична от 0 (см. выше).

Если угол между векторами единичной длины равен 2ϕ, то длину их суммы обозначим $2f(\phi)$. Пусть даны векторы $p_1 . p_2, q_1, q_2$ единичной длины, причём угол между p_1, p_2 и между q_1, q_2 равен 2ψ, угол между p_1, q_1 равен $2(\phi + \psi)$, а угол между p_2, q_2 равен $2(\phi - \psi)$. Тогда угол между $p_1 \circ p_2, q_1 \circ q_2$ равен 2ϕ. Отсюда можно получить, что

$$f(\phi + \psi) + f(\phi - \psi) = 2f(\phi)f(\psi)$$

при $0 \leq \psi \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. Функция $f(\phi)$ непрерывна в силу (iv), равна 0 при $\phi = \frac{\pi}{2}$ и отлична от 0 при $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Из решения задачи 18 следует, что $f(\phi) \equiv \cos\phi$, откуда следует утверждение задачи для векторов равной длины. На случай неравной длины оно обобщается посредством геометрических рассуждений, не использующих функциональные уравнения; см. [1], с. 17–18.

Библиография

1. Я.Ацел, Ж.Домбр. Функциональные уравнения с несколькими переменными. М.: Физматлит, 2003.

2. Е. Пенцак, А.Юрчишин. Функційні рівняння. Львів: ЛДУ, 1998.

3. Л.М.Лихтарников. Элементарное введение в функциональные уравнения. СПб: Лань, 1997.

4. Б.Р.Френкин. Интеграл от степени: неочевидное в очевидном. // Математическое просвещение, N 1. М.: МЦНМО, 1997.